

令和 6 年 5 月 27 日現在

機関番号：13902

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2019～2023

課題番号：19K03445

研究課題名(和文)無限アソシエーションスキームにおけるDelsarte理論の研究

研究課題名(英文)Delsarte theory for infinite association schemes

研究代表者

野崎 寛 (Nozaki, Hiroshi)

愛知教育大学・教育学部・准教授

研究者番号：80632778

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：デルサルトル理論とは、符号理論やデザイン理論を、アソシエーションスキーム上の統一的な枠組みで行う理論である。無限距離正則グラフでの商グラフは正則一様なハイパーグラフとなる。無限距離正則グラフでデルサルトル理論の類似を得て、正則一様なハイパーグラフでの線形計画限界を確立した。応用の一つとして、第二固有値を固定したときの、頂点数の上界について、既存の結果をいくつか改善した。s距離集合や球面tデザインといった、球面上の良い有限集合に対して、特徴づけなどの結果を得た。特に、正十二面体が5距離集合として最大の頂点数を持つことと、その一意性を示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

グラフの第二固有値が小さく頂点数が大きいグラフは、ある種の連結性を保証し、ネットワーク設計などの応用上も重要な対象となる(エクспанダーグラフなど)。今回の研究成果のひとつである第二固有値を固定したときの正則グラフの頂点数に対する上界は、そのようなグラフの基礎研究に貢献するものになることが十分期待できる。

正十二面体が最大5距離集合として一意であることは、少なくとも25年以上未解決として知られていた離散数学の問題であった。s距離集合や球面tデザインなどの球面有限集合の特徴づけについては、デルサルトル理論との関係も深く、代数構造の応用や発見への貢献が期待される。

研究成果の概要(英文)：The Delsarte theory provides a unified framework for coding theory and design theory based on association schemes. Quotient graphs of infinite distance-regular graphs become regular uniform hypergraphs. By obtaining an analogue of the Delsarte theory for infinite distance-regular graphs, we established linear programming bounds for regular uniform hypergraphs. As one application, we improved several known results regarding the upper bound on the number of vertices when the second eigenvalue is fixed.

For good finite sets on the sphere, such as s-distance sets and spherical t-designs, we derived several characterizations and results. In particular, we demonstrated that the regular dodecahedron has the maximum number of vertices as a 5-distance set and proved its uniqueness.

研究分野：代数的組合せ論

キーワード：アソシエーションスキーム 球面デザイン 線形計画限界 s-距離集合 代数体 ルート格子 保型形式 グラフの固有値

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

アソシエーションスキームに付随する Bose-Mesner 代数の二つの基底  $\{A_i\}, \{E_i\}$  の双対構造から得られる線形計画限界は、符号理論・デザイン理論において良い特徴づけを与えてきた (Delsarte 理論). 重要なクラスに P 多項式スキーム・Q 多項式スキームがあり、それらの無限集合版であるランク 1 対称空間・無限距離正則グラフを、Bose-Mesner 代数の生成元の個数の観点から一般化し、無限アソシエーションスキームを定義したい。無限アソシエーションスキーム上で Delsarte 理論を確立し、より統一的な視点から符号理論・デザイン理論を再構築する。

### 2. 研究の目的

(1) 無限距離正則グラフとその商グラフのハイパーグラフにおいて、正則木とその商グラフの正則グラフにおける線形計画限界の拡張を行う。無限距離正則グラフにおいて、Bose-Mesner 代数が一元で生成されることが重要である。無限アソシエーションスキームの概念の定式化を見据え、2 元生成の Bose-Mesner 代数を持つ組合せ構造を明らかにしたい。

(2) アソシエーションスキームは可移置換群の組合せ論的一般化とみなせるが、可移とは限らない置換群に対応するアソシエーションスキームの一般化として、コヒアラント配置が知られている。コヒアラント配置においては、Delsarte 理論と相性のよいクラスは知られていない。サイズの大きな  $s$  距離集合 ( $2$  点間の距離の個数が  $s$ ) を構成し、よい Bose-Mesner 代数を持つコヒアラント配置を発見し、コヒアラント配置における Delsarte 理論を構築したい。

### 3. 研究の方法

(1) まず、2 元生成の Bose-Mesner 代数を持つアソシエーションスキームを見つけることから始めたい。2 つのアソシエーションスキームから直積やレス積という操作で新しいアソシエーションスキームを構成する方法が知られている。その様な操作を 2 つの距離正則グラフに施し、出来上がったアソシエーションスキームの Bose-Mesner 代数がいくつの元で生成されるかを明らかにしたい。もし、2 つの距離正則グラフから、2 元生成の Bose-Mesner 代数を持つアソシエーションスキームを見つける方法が確立できれば、豊富な具体例がある有限距離正則グラフと無限距離正則グラフを組み合わせることで、多くの 2 元生成無限アソシエーションスキームが得られる。2 元生成アソシエーションスキームに対しては、距離正則グラフと同様の議論が展開できる可能性があり、ハイパーグラフのさらなる拡張となる新たな概念での Delsarte 理論を展開できる可能性がある。この課題は見村万佐人氏 (東北大学助教)、奥田隆幸氏 (広島大学助教) との共同研究として行なう。

(2) 大きな 2 距離集合の構成を目的として、strongly resolvable design (ブロックグラフが正則完全  $m$  部グラフ) の 2 距離集合としての埋め込みを含む最大な 2 距離集合を分類したい。この課題は篠原雅史氏 (滋賀大) との共同研究として行なう。

### 4. 研究成果

研究の目的(1)について

最終的には、2 元生成のアソシエーションスキームの定式化には、研究期間内では至らなかった。しかし、以下のような Delsarte 理論の類似を得ることに成功し、その応用として、いくつかの既存の定理を改善することに成功した。なお 2 元生成のアソシエーションスキームについては、Bannai-Kurihara-Zhao-Zhu (Multivariate P- and/or Q-polynomial association schemes) たちが新たな展開を見せており、本研究により得られた成果と共に進展することが期待される。以下、得られた関連する成果について報告する。

正則一様なハイパーグラフの隣接行列とは、頂点集合で添え字づけられる行列で、その  $(u, v)$  成分は、 $u, v$  を含む辺の個数で定義される。ハイパーグラフの固有値とは、この隣接行列の固有値のことである (ハイパーグラフの固有値については他の定義の方法もある)。線形計画限界とは、異なる固有値の値から、ハイパーグラフの頂点数の上界を与える手法である。Jack Koolen (University of Science and Technology of China), Sebastian M. Cioaba (University of Delaware), Takayuki Okuda (広島大), Masato Mimura (東北大) との共同研究として、ハイパーグラフの線形計画限界を用いて、以下のように既存の結果を改善した。Feng-Li (1996) は正則一様なハイパーグラフの第二固有値 (二番目に大きい固有値) をある値以下としたとき、直径に対して上界を与えた。直径の上界を得ると、Moore の上界から頂点数の上界が得られる。本研究では、同じ第二固有値の条件に対して、線形計画限界を適用して得られる頂点数の上界が、Feng-Li (1996) が与えた上界より良いことを示した。また、Dinitz-Schapiro-Shahaf (2020) で与えられている、正則グラフの固有値と直径を用いた Moore の上界の改善に対して、正則一様なハイパーグラフへの一般化と、ある種の部分的な結果の改善を行った。また、 $r, u$  を固定し、 $r$ -正則、 $u$ -一様なハイパーグラフの中で、第二固有値  $t$  を具体的に固定し、最大頂点数を持つグラフを決定する問題に対して (その様な

グラフでは、ある種の良い連結性が保証される)、いくつかのタイプの $(r, u, t)$ に対して最大なグラフを決定した。

研究目的(2)について

$s$  距離集合や、ある意味で球面をよく近似する有限集合である球面デザインに関する成果をいくつか得ることができた。

ユークリッド空間上の有限集合  $X$  で互いに異なる 2 点間の距離の値が整数であり、素数  $p$  を法として、その距離の値の個数が  $s$  であるとき、元の個数  $|X|$  について、ある自然な上界(mod- $p$  bound)が得られることが知られている[Blokhuis (1984)]。これを任意の代数体の整数環とその素イデアルに拡張することに成功した論文が、代数的組合せ論専門誌 Algebraic Combinatorics に掲載された。さらに、 $s=1$  のとき、先述の上界を達成する例が存在する次元の特徴づけに成功しており、これをまとめた論文も学術誌に投稿済みである。

球面をある意味でよく近似する集合として spherical  $T$ -design という概念が知られている。線形計画限界と呼ばれる手法を適用することで、 $D_4$  ルート系からなる 24 点の球面上の集合が、極対的な  $\{2, 4, 10\}$ -design の元の個数の下界を達成することを示すことができた。さらに、その下界を達成する集合は  $D_4$  ルート系のみであることも示すことに成功した。この結果の応用として、 $D_4$  ルート格子の一般の shell (原点からの距離が等しい、 $D_4$  ルート格子の部分集合)が、 $D_4$  ルート系の直交変換たちで分割できることを示した。これは、平尾将剛氏(愛知県立大学)、田坂浩二氏(愛知県立大学)との共同研究として行った。

篠原雅史氏(滋賀大)と  $s$ -距離集合( $s$ -distance set)に関する研究に取り組んだ。 $s$ -距離集合とは、ユークリッド空間上の有限集合で、その互いに異なる 2 点間の距離の値が  $s$  種類しか出てこないものをいう。長く未解決であった「3 次元空間上の頂点数最大となる 5 距離集合は正 12 面体に限られる」(正 12 面体予想)ことを証明することが出来た。その証明において重要な結果は、3 次元における 20 点の 5 距離集合が、8 点 4 距離集合を含むことである。8 点 4 距離集合を埋め込み可能なグラフの分類により分類し、それらに 5 距離集合という性質を保ったまま、どれだけ点を付け加えられるかを、計算機により確認した。本論文は、Graphs and Combinatorics に掲載された。

Peter Boyvalenkov (Bulgarian Academy of Sciences) と Navid Safaeic (Sharif University of Technology) との共同研究によって、 $t \geq 2s-2$  を満たす  $s$ -distance  $t$ -design の互いに異なる 2 点間の内積が必ず有理数になることを示した。この対象はデルサルト理論においては非常に重要な対象で、この結果は、その存在・非存在の解明に応用できる可能性がある。これをまとめた論文は Linear Algebra and its Application に掲載された

ユークリッド空間  $\mathbb{R}^d$  上の  $s$ -距離集合(互いに異なる 2 点間のユークリッド距離の集合の濃度が  $s$ )の理論の、擬ユークリッド空間(pseudo-Euclidean space)  $\mathbb{R}^{p,q}$  への拡張について、主にグラフの埋め込みに関する定理を拡張することが出来た。これは、篠原雅史氏(滋賀大)と須田庄氏(防衛大)との共同研究により行い、Bulletin of the Iranian Mathematical Society に掲載された。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計10件（うち査読付論文 9件 / うち国際共著 3件 / うちオープンアクセス 10件）

1. 著者名 Cioaba Sebastian M., Koolen Jack H., Mimura Masato, Nozaki Hiroshi, Okuda Takayuki	4. 巻 104
2. 論文標題 On the spectrum and linear programming bound for hypergraphs	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 European Journal of Combinatorics	6. 最初と最後の頁 103535
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.ejc.2022.103535	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する
1. 著者名 Boyvalenkov Peter, Nozaki Hiroshi, Safaei Navid	4. 巻 646
2. 論文標題 Rationality of the inner products of spherical s-distance t-designs for $t \geq 2s-2$ , $s \geq 3$	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Linear Algebra and its Applications	6. 最初と最後の頁 107 ~ 118
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.laa.2022.03.028	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する
1. 著者名 野崎寛	4. 巻 -
2. 論文標題 Bounds for sets with few distances distinct modulo a prime ideal	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 第38回代数的組合せ論シンポジウム	6. 最初と最後の頁 1~7
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Hiroshi Nozaki, Masashi Shinohara	4. 巻 37
2. 論文標題 A proof of a dodecahedron conjecture for distance sets	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Graphs and Combinatorics	6. 最初と最後の頁 1585--1603
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00373-021-02318-5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Hiroshi Nozaki, Masashi Shinohara	4. 巻 343
2. 論文標題 Maximal 2-distance sets containing the regular simplex	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Discrete Math.	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.disc.2020.112071	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Hiroshi Nozaki	4. 巻 342
2. 論文標題 Largest regular multigraphs with three distinct eigenvalues	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Discrete Mathematics	6. 最初と最後の頁 2134 ~ 2138
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.disc.2019.04.016	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Sebastian Cioaba, Jack, Koolen, Hiroshi Nozaki	4. 巻 2
2. 論文標題 A spectral version of the Moore problem for bipartite regular graphs	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Algebraic Combinatorics	6. 最初と最後の頁 1219 ~ 1238
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.5802/alco.71	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Hirao Masatake, Nozaki Hiroshi, Tasaka Koji	4. 巻 9
2. 論文標題 Spherical designs and modular forms of the $D_4$ lattice	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Research in Number Theory	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s40993-023-00479-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Nozaki Hiroshi, Shinohara Masashi, Suda Sho	4. 巻 50
2. 論文標題 Embedding Dimensions of Matrices Whose Entries are Indefinite Distances in the Pseudo-Euclidean Space	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Bulletin of the Iranian Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s41980-023-00842-z	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Nozaki Hiroshi	4. 巻 6
2. 論文標題 Bounds for sets with few distances distinct modulo a prime ideal	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Algebraic Combinatorics	6. 最初と最後の頁 539 ~ 545
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.5802/alco.272	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

〔学会発表〕 計14件 (うち招待講演 8件 / うち国際学会 5件)

1. 発表者名 野崎寛
2. 発表標題 Bounds for sets with few distances distinct modulo a prime ideal
3. 学会等名 第38回代数的組合せ論シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 野崎寛
2. 発表標題 整数環の素イデアルを用いたs-距離集合の上界の改善
3. 学会等名 愛媛大学代数セミナー
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Hiroshi Nozaki
2. 発表標題 A generalization of mod-p bounds for s-distance sets to a ring of integers
3. 学会等名 Workshop on Algebraic Combinatorics, Online (zoom) organized by National Taiwan University (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Hiroshi Nozaki
2. 発表標題 Few-distance sets and the Dodecahedron conjecture
3. 学会等名 Extremal problems of discrete geometry, Online (zoom) organized by Moscow Institute of Physics and Technology (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Hiroshi Nozaki
2. 発表標題 Linear programming bounds on the order of a regular graph given eigenvalues or girth --regular graphs with large girth--
3. 学会等名 A number theoretic approach for Post-Quantum Cryptography related to Ramanujan graphs, Online (zoom) organized by Kyushu University (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Hiroshi Nozaki
2. 発表標題 Note on s-distance sets in the pseudo Euclidean space $R^{p,q}$
3. 学会等名 名古屋組合せ論セミナー, Online (zoom), 愛知県立大学
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Hiroshi Nozaki
2. 発表標題 Linear programming bounds for regular uniform hypergraphs
3. 学会等名 The 22nd Conference of the International Linear Algebra Society (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hiroshi Nozaki
2. 発表標題 Maximal 2-distance sets containing the regular simplex
3. 学会等名 Tenth Discrete Geometry and Algebraic Combinatorics Conference (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hiroshi Nozaki
2. 発表標題 Linear programming methods to obtain bounds on the order of regular graphs
3. 学会等名 Joint Workshop on Algebraic Combinatorics and Cryptography
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Hiroshi Nozaki
2. 発表標題 Linear programming bounds for regular uniform hypergraphs
3. 学会等名 Sendai Workshop on Combinatorics
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 野崎寛
2. 発表標題 正則一様ハイパーグラフにおける線形計画限界について
3. 学会等名 日本数学会2019年度秋季総合分科会（応用数学）（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hiroshi Nozaki
2. 発表標題 Uniqueness of the $D_4$ root system as tight antipodal spherical $\{10, 4, 2\}$ -design
3. 学会等名 Sphere packings, coverings, and spherical codes（国際学会）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 野崎寛
2. 発表標題 $D_4$ 格子に関わる球面デザインの一意性と構造について
3. 学会等名 離散数学とその応用研究集会 2023（招待講演）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 野崎寛
2. 発表標題 Spherical analogue of the Galois theory of graph coverings
3. 学会等名 早稲田組合せ論セミナー
4. 発表年 2023年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

Home page - Hiroshi Nozaki  
<https://hnozaki.jimdofree.com/>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
中国	Univ. of Science and Technology of China			
米国	University of Delaware			
ブルガリア	Bulgarian Academy of Sciences			
イラン	Sharif University of Technology			
中国	Univ. of Science and Technology of China			