

令和 6 年 6 月 3 日現在

機関番号：34416

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2019～2023

課題番号：19K03446

研究課題名（和文）正規標準曲面と許容される特異点の研究

研究課題名（英文）On normal canonical surfaces and admissible singularities

研究代表者

今野 一宏（Konno, Kazuhiro）

関西大学・総合情報学部・教授

研究者番号：10186869

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,100,000円

研究成果の概要（和文）：標準写像が像の上に双有理となるような極小一般型代数曲面を標準曲面という。幾何種数4の標準曲面は有名なエンリケスの本が世に出てからも長い研究史があるが、研究代表者の研究以前には標準像が正規曲面であるものはほぼ自明な5次の場合しか認識されていなかった。本研究では6次正規標準曲面の具体的な構成法を探るものである。有理曲面の2重被覆で構成した曲面を具体的な方程式を変形して構成する方法が最も有効である。しかし正規かつ標準であるという2条件が満たされていることを証明することが困難であることから、得られた曲面がvolumeが10と11という未知の場合を解決するものか否かが明らかにならなかった。

研究成果の学術的意義や社会的意義

期待される最終的な結論は得られなかったものの、一般型2次元正規特異点の数値的な不変量による分類や2重被覆で構成した曲面、とくに超楕円的な曲線束をもつ曲面の変形については新たな知見が得られた。また、幾何種数が大きい場合の正規標準曲面の研究により、種数3の非超楕円的ファイバー芽についての認識がいつそう深くなった。本研究を通じて、幾何種数4の場合には、次数が7以上の正規標準曲面は存在しないという予想に至った。こういった未解決問題の提示は、当該分野の研究進展にひとつの道筋を示すものである。

研究成果の概要（英文）：A minimal surface of general type whose canonical map is birational onto the image is called a canonical surface. Such surfaces with geometric genus 4 have a long history since Enriques' book. It has not been recognized the existence of normal ones except in the trivial case of quintic surfaces, before my work on normal canonical surfaces. In this research, I tried to construct new examples of normal canonical sextic surfaces whose volume is either 10 or 11, by deforming double coverings of rational surfaces. However, I failed to show the surfaces thus obtained is actually canonical.

研究分野：代数幾何学

キーワード：一般型代数曲面 標準写像 正規特異点

## 様式 C - 19、F - 19 - 1 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

前世紀の前半に双有理不変量による射影代数曲面の分類が完成して以来、一般型曲面の具体例は様々な不変量に対して構成されてきた。特に、70年代にボゴモロフ・宮岡・ヤウの不等式が確立されると、存在可能域をすべて埋め尽くすべく多くの例が構成された。しかし、そのほとんどが2重分岐被覆を用いるものであったり、3次元射影空間内の通常特異点をもつ曲面の特異点還元として得られるものであったりしたため、必ずしも標準写像が像の上に双有理である曲面、すなわち標準曲面を構成しているとは言い難い。また、標準線形系の固定成分や標準像の持ちうる特異点にまで言及しているものはほとんどなかった。とりわけ、標準像が正規曲面であるような例は、研究代表者が次数6の正規標準曲面の研究に着手するまで、ザリスキーがそれと意識せずに構成したものを除き、存在そのものが認識されておらず手つかずの状態だった。こういった方向からの研究は、標準像のもつ正規特異点が2次元特異点の重要なクラスを形成するものと考えられる点においても、学術的価値を見い出すことができる。

### 2. 研究の目的

極小な非特異射影代数曲面は、標準写像が像(標準像)の上に双有理であるときに標準曲面であるという。本研究の目的は標準像が正規曲面であるような標準曲面の幾何学的な構造を、標準像がもつ特異点との関連で研究することにある。幾何種数4で標準像の次数が6であるようなものは研究代表者の先行研究でかなりの部分が明らかになっている。しかしヴォリューム(標準束の自己交点数)が10や11になる例は知られておらず、その具体例を構成することが第一の目的である。また、数値的5次曲面を例に挙げるまでもなく、正規標準曲面の持ちうる特異点は限定的であるから、そのような2次元特異点のクラスを特徴付けて、それを動機とした特異点研究を行う。

### 3. 研究の方法

幾何種数4で次数6の例を構成する方法として、次の2つの方針が考えられる。

(1) 3次元射影空間の有理変換による特異曲面の像として正規曲面を与え、それが実際にある一般型曲面の標準像であることを示す。

(2) 3次元曲面の分岐2重被覆の変形として標準曲面を構成し、その標準像が正規であることを示す。

それぞれの難点は次の通りである。(1)では取り扱いが比較的容易な特異点を配置した特異曲面の方程式を具体的に与え、その標準変換が誘導する3次元射影空間の有理変換を考えることになる。この場合、その射影空間の有理変換が双有理変換か否か、また、その像として得られる曲面が6次であり、しかも正規曲面であるかを確認しなければならない。(2)ではまず望む不変量をもつ曲面を特異3次元曲面の分岐2重被覆として構成するから、その分岐因子の特異点および配置を決定しなければならない。また、その良い変形方向を見つけ、かつ変形して得られる曲面が標準曲面であることを示す必要がある。

具体例の計算を高速に行うためには高性能なパーソナル・コンピュータと数式処理ソフトウェアの力を必要とする。また、得られたデータを保存するために大容量ハードディスク等の記憶装置を用いる。数学研究の基本形態のひとつは、関連諸分野の研究協力者と直接に会って議論しアイデアを交換しつつ研究対象への認識を深めることである。そのために研究集会を開催して最新の資料収集を図り、研究成果の公表の機会を設ける。国内に限らず海外の研究協力者を招聘し、あるいはこちらから訪問し、議論することも重要である。また、関連分野の書籍を購入し、それにあたることによって幅広く基本的な知識を身に付け、理解を深める。

### 4. 研究成果

上述の2つの構成法に従って、望む数値的不変量をもつ一般型曲面を複数構成することに成功した。しかし、それが標準曲面であること、および標準像が正規であることを示すことは困難であり、得られた曲面が幾何種数4でヴォリュームが10, 11の正規標準曲面である

と断定することはできなかった。

研究過程では次のように研究対象を拡大した。

(1) 3次曲面に限定せず、楕円曲面の分岐2重被覆およびその微小変形を研究した。分岐因子の特異点の配置と得られる曲面の数値的不変量や標準線形系の基点集合を調べた。複素構造の微小変形については、とくに2重被覆の構造を保存しない方向への変形を考察した。

(2) 幾何種数4の正規標準曲面の次数をより精密に限定することを考えた。具体的には「幾何種数4の正規標準曲面は5, 6次に限る」という予想の証明を試みた。宮岡の不等式から、存在可能な次数は限定できるので、それを対数的な宮岡型不等式を用いて改良した。決定的な結果には至らなかったため、公表できる段階にはないが、可能な特異点の範囲を限定することはできた。

(3) 幾何種数を4に限定せず、次数がカステルヌオヴォー線に近い正規標準曲面を考察した。有限個の可能性を除けば種数3の非超楕円的な曲線束をもち、標準像の許容する特異点は楕円型と基本種数2の特殊な特異点であることを明らかにした。一部は小山の不等式との関連した研究代表者の研究があるとは言え、基本種数2の特異点に関する組織的な研究が待たれる。またこの方面は、代数曲線束芽のモジュライに関する足利・松本の理論との関連で、今後の研究進展が大いに期待できる。

以上のように、残念ながら当初の研究目的である新しい正規標準曲面の構成は果たせなかった。しかし、副産物的に得られた知見は必ずや将来の研究の礎となり、当該分野の研究進展に寄与できるものと信じている。

まだ投稿段階には至っていないが、得られたいくつかの研究成果は証明を精査した後に学術論文として公表予定である。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計0件

〔学会発表〕 計1件（うち招待講演 1件 / うち国際学会 1件）

1. 発表者名 今野一宏
2. 発表標題 Sextics and surfaces of general type
3. 学会等名 Degenerations, Algebraic surfaces and related topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 Kunihiko Kodaira (translated by Kazuhiro Konno)	4. 発行年 2020年
2. 出版社 Springer	5. 総ページ数 88
3. 書名 Theory of Algebraic Surfaces	

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------