様　式　C－19、F－19－1、Z－19　(共通)

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　４ 年　 ６ 月 １９ 日現在

機関番号：１５５０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2019～2021
課題番号：１９Ｋ０３４４９

研究課題名（和文）解析数論的誤差項の研究

研究課題名（英文）Study of error terms in analytic number theory

研究代表者
南出　真（Minamide, Makoto）

山口大学・大学院創成科学研究科　・准教授

研究者番号：８０５９６５５２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,400,000円

研究成果の概要（和文）：ハーディー関数の導関数の二乗平均について，1999 年の Hall による研究の中で，誤差項の改良が示唆されたが，それを谷川好男氏との共著論文で示した．また，二重ゼータ関数の評価や二乗平均について，D. Banerjee 氏， 谷川好男氏と改良を得て，論文で発表した．Joshi-Vaidya による自然数 n の約数のうち，素数 p と互いに素であるものの最大数についての一乗平均の誤差項の研究を，中野実優氏， 古屋淳氏と二乗平均の場合に一般化し，論文発表した．素数 p という条件を square-free にしたものについて，井川祥彰氏，中野実優氏と論文発表した．

研究成果の学術的意義や社会的意義
およそ20年，多重ゼータ関数の研究は日本を中心として発展し続けている．この様な状況において，当初予定になかった，二重ゼータ関数の評価や二乗平均について，知られている結果の改良を得られたことは学術的にも社会的にも意義があったと思う．また，Hall のハーディー関数の微分の二乗平均の結果を改良できたことは，リーマンゼータ関数の理論に寄与したと思う．他に，インドで盛んに研究されていたある種の約数関数についての研究について，今回，二乗平均に関する結果が得られたことは意義があると思う．

研究成果の概要（英文）：In 1999, Hall studied the mean square of the derivatives of Hardy's Z-function, and suggested to improve the result. It was a main purpose of our project. Yoshio Tanigawa and I succeeded to show the O-estimate as Hall' suggestion. On double zeta function, an estimate of the order of function was suggested by Isao Kiuchi and Y. Tanigawa, 2006. Debika Banerjee, Y. Tanigawa and I attempted to prove the conjecture and we obtained it. Moreover, we improved a result on the mean square of double zeta function by I. Kiuchi and I. Joshi and Vaidya studied the error term in the mean of the greatest divisor of n which is coprime to fixed k. Jun Furuya, Miyu Nakano, and I considered the error term in the mean square of the function. In the case of k=p (any prime), we obtained the limsup and liminf of the error term. As a related problem, for any square-free integer k, Tadaaki Igawa, M. Nakano and I obtained an asymptotic formula of the mean of the error term.

研究分野：解析的整数論

キーワード：解析数論的誤差項　二乗平均　様々な約数関数　メビウス関数　リーマンゼータ関数　ハーディー関数　微分　二重ゼータ関数

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景
解析的整数論では，数論的な対象の平均(和，積分)を考えることが多い．例えば，数論的関数の平均については，主項は比較的容易に得られることがあるが，誤差項の評価は難しい．なるべく精密に誤差項を評価すること，あるいは誤差項の平均挙動を知ることが普遍的な課題の一つである．本研究では当初，以下に述べる解析数論的誤差項に注目した．

(1) Hardy はリーマンゼータ関数ζ(s)の零点が Re s =1/2 上にどれくらいあるかを調べるために，零点 1/2+it に対して Z(t)=0 となる関数を導入した．今日， それは，ハーディー関数と呼ばれている．リーマンゼータ関数の零点分布の研究は，ハーディー関数に依らない方向で発展したが, Z(t) に関する研究は Ivic や Jutila によって発展させられた. 1999 年に, Hall が Z(t) の k 階微分の二乗平均を研究し，ゼータ関数の零点間の差を評価に応用した．このとき，二乗平均の誤差項が $O(T^{3/4}(\log T)^{2k+1/2})$ であったが，$T^{3/4}$ を $T^{1/2}$ への改良が示唆された (Mathematika, 46 (1999), 281-313).

(2) 他の問題として，自然数 n の約数の中で, k と互いに素である約数の最大数を $\delta_k(n)$ と記す．これはインドで Suryanarayana, Joshi, Vaidya, Adhikari などの研究者に盛んに調べられた．kを固定した状況で，n ≦x である$\delta_k(n)$ の平均については，Joshi と Vaidya の研究があり，彼らは平均についての漸近式を得て，k=p (素数)　の場合にその誤差項 E(x) について，E(x)/x の limsup, liminf を明らかにしている．$\delta_k(n)$ のべき乗平均などについては，井川祥彰氏が山口大学の修士論文(2018 年)で調べている．

(1), (2) に関する研究以外に，x 以下の自然数 n の素因子の総数 Ω(n) に関する問題も考えていたが，本研究ではほとんど実行できなかった．

２．研究の目的
研究開始当初は，次の二つが大きな目的であった．
(1) 上に述べた Hall によるハーディー関数の導関数の二乗平均の誤差項を改良すること．
(2) 素数 p を固定し，$\delta_p(n)$ の二乗平均の誤差項 $E_2(x)$ について，$E_2(x)/x^2$ の limsup, liminf を求めること．

当初の研究目的以外に，次の課題にも取り組んだ．(1), (2) を議論しているときに発生した問題である．いずれも解析数論的誤差項の問題である．
(3) 二重ゼータ関数の評価について，木内・谷川の予想(Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)5(2006), 445-464)を証明すること，二重ゼータ関数の二乗平均について，木内・南出の結果(Funct. Approx. Comment. Math. 55(2016), 31-43)を改良すること．

(4) Apostol が導入した 位数 k (k ≧2, 整数)のメビウス関数$\mu_k(n)$について，n≦x である平均の誤差項について， Apostol が得た誤差項 $O(x^{1/k}\log x)$ (Pacific J. Math. 32(1970),21-27)をリーマン予想を用いずに改良すること．リーマン予想を用いた， Apostol の結果の改良は，Suryanarayana によって知られている(Pacific J. Math. 68 (1977), 277-281).

(5) 上記 (2) に関連する問題として，square-free である k を固定し，$\delta_k(n)$ の二乗平均を考え，誤差項 $E_2(x)$ について，$E_2(n)$ の平均を明らかにすること．

(6) 約数関数 $\sigma(n)=\sum_{d|n} d$ の d に d≡k (m) という条件を付けたものを$\sigma(n;k,m)$ と書くことにする．$\sigma(n;k,m)$ の平均の誤差項 $E^*(x)$ について，$E^*(n)$ の平均を明らかにすること．

３．研究の方法
(1) 本橋の Lectures on the Reimann-Siegel formula (Colorado University, 1987) を参考にして，リーマンゼータ関数の k 階導関数のリーマン・ジーゲル公式を準備し，ハーディー関数の k 階微分のリーマン・ジーゲル公式を導く．そして，ハーディー関数の k 階微分の二乗平均を求める．
(2) $\delta_p(n)$ の二乗平均 $\sum_{n\leq x} \delta_p(n)^2$ は $c(k)x^3$+誤差，という形になるが，誤差項 $\sum_{n\leq x} \delta_p(n)^2-c(k)x^2$ に kp/6 加えた関数を誤差項の代わりに考え，それに対して，Joshi-Vaidya の論文の手法を応用する．
(3) 2011 年の木内・谷川・Zhai の論文(Indag. Math. (N.S.)21(2011), 16-29)で，二重ゼータ関数の近似式が示されているが， その近似式の中にある約数和関数の部分和をペロンの公式を用いて， リーマンゼータ関数の積分評価に帰着させて，二重ゼータ関数の評価を精密に行う．その評価を応用して，二重ゼータ関数の二乗平均を求める．

(4) Apostol のメビウス関数 $\mu_k(n)$ を係数とするディリクレ級数のオイラー積表示はリーマンゼータ関数とあるオイラー積 $A_k(s)$ の積になるが，$A_k(s)$ をディリクレ級数表示し，その係数の部分和をリーマンゼータ関数の非零領域に関する命題を用いて精密に評価する．その結果を用いて，$\mu_k(n)$ の平均を求める．
(5) $\Sigma_{n\leq x}\ \delta_p(n)^2 = c(k)x^3 + E_2(x)$ として，$\Sigma_{n\leq x} E_2(n)$ を求めるために，$\Sigma_{n\leq x}\ \delta_p(n)^2$，$\Sigma_{n\leq x}\ \delta_p(n)^2/n$，$\Sigma_{n\leq x}\ \delta_p(n)^2/n^2$ を調べて，それらの誤差項を組み合わせて，$\Sigma_{n\leq x} E_2(n)$ の漸近公式を導く．
(6) Chowla-Pillai の論文 (J.Indian Math. Soc.18(1930), 181-184)を参考にして，$\Sigma_{n\leq x}\ \sigma(n;k,m)$ と $\Sigma_{n\leq x}\ \sigma(n;k,m)n$ を調べ，その誤差項を組み合わせて，$\Sigma_{n\leq x} E^*(n)$ の漸近式を導く．

４．研究成果
(1) 谷川好男氏とハーディー関数の k 階導関数 $Z^{(k)}(t)$ のリーマン・ジーゲル公式の誤差項を小さく評価し，Hall による $Z^{(k)}(t)$ の二乗平均の誤差項を改良した.ハーディー関数についての，Ivic の本(The Theory of Hardy’s Z-function, Cambridge, 2013)などに述べられている Riemann-Seigel 公式の誤差項をより精密にした結果であるから，今後のハーディー関数の研究に寄与できたと思う．これは，論文`Mean square of the derivatives of Hady’s Z-function’としてまとめた．
(2) 素数 p について，$R_p(x)= \Sigma_{n\leq x}\ \delta_p(n)^2-c(k)x^3+kp/6$ とする.中野実優氏,古屋淳氏と議論して，$\mathrm{Limsup}\ R_p(x)/x^2=p^2/(p^2+p+1)$，$\liminf R_p(x)/x^2=- p^2/(p^2+p+1)$を示した．$\delta_p(n)^2$ の平均の誤差項に kp/6 を加えるというアイデアは，この種の研究で新しいものと思われる．今後，$\delta_k(n)$の研究に活用されると思われる.この結果以外に，一般の k (square-free) に対する,$\limsup |R_k(x)|/x^2$ の評価や$\delta_k(n)$の任意べき乗平均の漸近式を，井川氏の修士論文とは別の方法で示した．これらの成果は，論文`A note on the mean square of the greatest divisor of n which is coprime to a fixed integer k’としてまとめた．
(3)Debika Banerjee 氏，谷川好男氏と，二重ゼータ関数$\zeta(s_1,s_2)$について，$0<\mathrm{Re}\ s_1, \mathrm{Re}\ s_2 <1$ における評価をより精密に評価し，木内・谷川の論文で述べられた予想を肯定的に証明した．さらに,木内・南出による二重ゼータ関数の平均値定理を改良した．これらは，論文`Bounds of double zeta-functions and their applications’,`Mean square of double zeta-function’にまとめた.多重ゼータ関数の研究は，日本を中心に，20 年余り発展を遂げている.この二つの論文は，今後の研究に良い影響を与えると思う．
(4) Debika Banerjee 氏，藤澤雄介氏，谷川好男氏と，Apostol のメビウス関数の平均の誤差項の評価の改良に取り組んだ．Apostol の結果 $O(x^{1/k}\log x)$を $O(x^{1/k})$より少し小さく評価することができた.Suryanarayana が，Riemann 予想を用いて，Apostol の結果が改良されることを示しているが，本研究では，Riemann 予想を用いなかった．Suryanarayana 自身，Riemann 予想を用いずとも，Apostol の結果を改良できるのではないかと述べており，それを実現することができた．この結果は，2020 年の日本数学会秋季総合分科会で発表した.時間がかかってしまったが，論文`A note on the partial sum of Apostol’s Mobius function’としてまとめて，2022 年の 4 月に投稿した．これ以前に，square-free 整数上での約数問題を考えた研究もあり，論文 `Divisor problem on square-free integers’として，これも 2022 年の 4 月に投稿した．
(5) 中野実優氏，井川祥彰氏と共に，Pillai-Chowla の論文(J.London Math. Soc.5(1930),95--101)の手法を検証し，その framework を見出し，$\Sigma_{n\leq x} E_2(n)$ の漸近公式を導いた．その結果から，$E_2(x)=\Omega_{\pm}(x^2)$ がわかるが，　その一方で，$E_2(x)/x^3$ を 1 から∞の広義積分は収束し，その値を k を用いて表した．参考にした Pillai-Chowla の論文には，このような誤差項に関する広義積分については言及されておらず，Pillai-Chowla の論文に対する新しい観点であると思う．これらの成果は，論文`The Pillai-Chowla method for an error term in the mean square of $\delta_k(n)$’としてまとめた．
数論的関数の平均の誤差項に関する広義積分については，先行研究はいくつかあるが，今回の手法は，はっきりと言及されていないように思う。今後の研究課題として，数論的関数の平均の誤差項に関する積分を考えている．元々，$\delta_k(n)$ のみに注目したのであるが，他の数論的関数の平均の誤差項の積分の問題に発展したと思う．
(6) Chowla-Pillai の論文を参考に，出崎千晶氏，矢代好克氏，谷川好男氏と共に，$\Sigma_{n\leq x} E^*(n)$ の漸近公式を導いた．さらに，$E^*(x)$ に関する積分の評価も行った．また，結果の応用として，自然数 n を 4 つの平方数で表す方法の個数 $r_4(n)$ についての平均の誤差項 $P_4(x)$ について，$\Sigma_{n\leq x} P_4(n)$ の漸近公式なども導いた．これらの成果は，2020 年の日本数学会 中国四国支部例会で発表した．論文にまとめようとしたが，$\sigma(n;k,m)$ をさらに一般化したものを現在，調べている．その後，得られた結果を 2021 年の日本数学会の秋季総合分科会で講演した．さらに，(5) で述べた手法との関連もわかってきた．この研究を継続し，発展させたい．

5．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計6件（うち査読付論文　6件／うち国際共著　2件／うちオープンアクセス　0件）

1．著者名 Tadaaki Igawa, T.Makoto Minamide, Miyu Nakano	4．巻 38
2．論文標題 The Pillai-Chowla method for an error term in the mean square of δk(n)	5．発行年 2021年
3．雑誌名 Nepali Math. Sci. Rep.	6．最初と最後の頁 39-51
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 Jun Furuya, T.Makoto Minamide, Miyu Nakano	4．巻 52
2．論文標題 A note on the mean square of the greatest divisor of n which is coprime to a fixed integer k	5．発行年 2021年
3．雑誌名 Indian J. Pure Appl. Math.	6．最初と最後の頁 990-1003
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s13226-021-00103-x	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 Jun Furuya, T.Makoto Minamide, Yoshio Tanigawa	4．巻 71
2．論文標題 Titchmarsh's method for the approximate functional equations for\zeta^{\prime}(s)^2, \zeta(s)\zeta^{\prime\prime}(s),and \zeta^{\prime}(s)\zeta^{\prime\prime}(s)	5．発行年 2019年
3．雑誌名 Canad. J. Math.	6．最初と最後の頁 1465-1493
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4153/CJM-2018-004-9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 T.Makoto Minamide, Yoshio Tanigawa	4．巻 485
2．論文標題 Mean square of the derivatives of Hardy's Z-function	5．発行年 2020年
3．雑誌名 J.Math.Anal.Appl.	6．最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jmaa.2019.123772	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 Debika Banerjee, T.Makoto Minamide, Yoshio Tanigawa	4．巻 304
2．論文標題 Bounds of double zeta-functions and their applications	5．発行年 2020年
3．雑誌名 Pacific J. Math.	6．最初と最後の頁 15-41
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2140/pjm.2020.304.15	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1．著者名 Debika Banerjee, T.Makoto Minamide, Yoshio Tanigawa	4．巻 44
2．論文標題 Mean square of double zeta-function	5．発行年 2021年
3．雑誌名 Tokyo J. Math.	6．最初と最後の頁 83-101
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3836/tjm/1502179322	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕　計6件（うち招待講演　0件／うち国際学会　0件）

1．発表者名 南出真，矢代好克，谷川好男
2．発表標題 合同約数和の平均に対する誤差項の平均について
3．学会等名 日本数学会 秋季総合分科会（千葉大学）
4．発表年 2021年

1．発表者名 Debika Banerjee，藤澤雄介，　南出真，谷川好男
2．発表標題 On partial sum of Apostol's M{\" o}bius function
3．学会等名 日本数学会・秋季総合分科会(熊本大学)
4．発表年 2020年

１．発表者名 中野実優，井川祥彰，南出真
２．発表標題 On an error term for the mean square of δk(n)
３．学会等名 日本数学会・年会（慶応大学）
４．発表年 2021年

１．発表者名 南出真， 谷川好男
２．発表標題 ハーディー関数の導関数の二乗平均について
３．学会等名 日本数学会　秋季総合分科会(金沢大学)
４．発表年 2019年

１．発表者名 谷川好男，出崎千晶，南出真，矢代好克
２．発表標題 法mの約数問題と整数の表現への応用について
３．学会等名 日本数学会 中国・四国支部例会(岡山理科大，加計研修センター)
４．発表年 2020年

１．発表者名 中野実優，古屋淳，南出真
２．発表標題 kと互いに素な最大約数の二乗平均の誤差項について
３．学会等名 日本数学会 中国・四国支部例会(岡山理科大，加計研修センター)
４．発表年 2020年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

6．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考
研究協力者	谷川　好男 (Tanigawa Yoshio)		
研究協力者	古屋　淳 (Furuya Jun)		
研究協力者	藤澤　雄介 (Fujisawa Yusuke)		
研究協力者	矢代　好克 (Yashiro Yoshikatsu)		
研究協力者	バネルジー　デビカ (Banerjee Debika)		
研究協力者	井川　祥彰 (Igawa Tadaaki)		
研究協力者	中野　実優 (Nakano Miyu)		

６．研究組織（つづき）

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考
研究協力者	出崎　千晶 (Dezaki Chiaki)		

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
インド	IIIT(Delhi)			