

令和 6 年 5 月 20 日現在

機関番号：32629

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2019～2023

課題番号：19K03452

研究課題名(和文) 一般化された球関数とアルキメデスゼータ積分の明示的研究

研究課題名(英文) Explicit study on generalized spherical functions and archimedean zeta integrals

研究代表者

石井 卓 (Ishii, Taku)

成蹊大学・理工学部・教授

研究者番号：60406650

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：GL(4, R)のWhittaker関数、Shalika関数を特徴づける偏微分方程式系を導出し、いくつかの場合にその明示公式を与えた。さらに、以下の保型L関数の積分表示に対して、アルキメデスゼータ積分を具体的に計算した。(イ)GL(4)の標準L関数、2次外積L関数の積に対するBump-Friedberg積分、(ロ)GL(n)×GL(n)、GL(n)×GL(n-1)のRankin-Selberg L関数、(ハ)GSp(2)の標準L関数、スピノールL関数の積に対するBump-Friedberg積分

研究成果の学術的意義や社会的意義

保型形式という高い対称性を兼ね備えた関数に対するゼータ関数(保型L関数)は、様々な整数論的なゼータ関数と結びつくと考えられている重要な研究対象である。保型L関数を積分表示式(ゼータ積分)によって研究する上でネックとなるのが「悪い素点」における解析であり、そのうち無限素点における研究をゼータ積分を直接計算することで実行した。

研究成果の概要(英文)：We derive systems of partial differential equations satisfied by Whittaker functions and Shalika functions on GL(4, R), and obtained explicit formulas of them in several cases.

We compute archimedean zeta integrals for automorphic L-functions in the following cases: (a) Bump-Friedberg integrals for the standard and the exterior square L-functions on GL(4), (b) Rankin-Selberg L-functions on GL(n)×GL(n), GL(n)×GL(n-1), (c) Bump-Friedberg-Ginzburg integrals for the standard and the spinor L-functions on GSp(2).

研究分野：数論

キーワード：保型L関数 アルキメデスゼータ積分 Whittaker関数

1. 研究開始当初の背景

様々な整数論的ゼータ関数と結びつくと考えられている保型形式のゼータ関数(保型 L 関数)は、数論における重要な研究対象の一つであり、その積分表示(ゼータ積分)は保型 L 関数の深い性質を研究する上で極めて有用な道具である。ゼータ積分は多くの場合、素点ごとの局所ゼータ積分の積に分解される。しかし無限素点や分岐有限素点といった「悪い素点」における局所ゼータ積分の解析の困難さが障害となり、保型 L 関数の大域的性質が満足に得られていないケースが少なくない。

無限素点においては、 $GL(2)$ の場合と同様に、Whittaker 関数の明示公式を用いてゼータ積分を明示的に計算すべく、 $GL(n, \mathbf{R})$ 、 $Sp(2, \mathbf{R})$ などで Whittaker 関数の明示公式が蓄積され、いくつかの場合にはアルキメデスゼータ積分が計算されていた。

2. 研究の目的

本研究の主目的は無限素点におけるアルキメデスゼータ積分を実簡約群上の一般化された球関数の明示公式を用いて計算し、保型 L 関数の正則性や極の位置、関数等式などの基本的かつ重要な性質を確立することである。またこの一般化された球関数は、それ自身が簡約群上の特殊関数論の観点からも興味深い研究対象であり、有限素点上の様々な球関数との関連性も意識しつつ、明示公式の統一的な解釈を模索する。

3. 研究の方法

研究の第一段階は、簡約群 G 上の一般化された球関数の明示公式を局所ゼータ積分の計算に適した形で与えることである。この一般化された球関数とは、 G の既約表現 Π の、 G の部分群 R からの誘導表現 $\text{Ind}_R^G(\eta)$ における実現を G 上の多変数関数として記述したものであり、保型形式の Fourier 展開に寄与する。とりわけ R が G のべき単部分群で η が指標である場合には Whittaker 関数と呼ばれる重要な研究対象である。無限素点における一般化された球関数は、 Π の構造を調べることにより、偏微分方程式系により特徴付けることができるため、その解、とくに緩増加な解の積分表示を求める。

研究の第二段階は、一般化された球関数 W の積分変換である局所ゼータ積分の計算である。目標はアルキメデスゼータ積分 $Z(s, W)$ から、局所 Langlands 対応から定まる、表現 Π の期待される局所 L 因子 $L(s, \Pi)$ を取り出すことである。特に、 $Z(s, W) = L(s, \Pi)$ という等式が成り立つような一般化された球関数 W を見出すことは、保型 L 関数の研究において極めて有用である。

4. 研究成果

以下のような状況において、一般化された球関数の明示公式の導出、アルキメデスゼータ積分の具体的な計算を実行した。

1. (宮崎直氏との共同研究) Eric Stade 氏との共同研究で得られていた $GL(n, \mathbf{R})$ のクラス 1 Whittaker 関数の明示公式や、それを利用したアルキメデスゼータ積分の計算についての簡明な証明を見出した。その着想を元にクラス 1 には限らない主系列表現に対する Whittaker 関数の明示公式や、 $GL(n) \times GL(n)$ 、 $GL(n) \times GL(n-1)$ 上の Rankin-Selberg L 関数のアルキメデスゼータ積分の計算への応用について調べた。
2. (平野幹氏、宮崎直氏との共同研究) $G = GL(4, \mathbf{R})$ の Whittaker 模型を持つようなすべての既約表現に対して、Whittaker 関数を特徴付ける偏微分方程式系の解析を通じて、極小 $K = O(4)$ タイプに対する Whittaker 関数 W の Mellin-Barnes 型積分表示を与えた。さらにこの明示公式を用いて、複素 2 変数のゼータ積分である Bump-Friedberg 積分の実素点における計算し、局所ゼータ積分が、標準 L 関数と 2 次外積 L 関数の積に一致するような Whittaker 関数を明示的に与えた。
3. (成田宏秋氏との共同研究) $G = Sp(2, \mathbf{R})$ の Whittaker 模型を持つような既約表現に対する Whittaker 関数の明示公式は既に知られているが、 G の極大べき単部分群 R の退化指標に対する Whittaker 関数については十分に調べられておらず、極小 K タイプのみならず、より広く重複度 1 の K タイプにおける明示公式を与えた。

4. $G = \mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ の Shalika 関数の不分岐素点における明示公式は知られているが、無限素点における研究を $n = 4$ の場合に進めた。Whittaker 関数の研究と同様の手法により、Shalika 関数を特徴づける偏微分方程式系を与え、いくつかの既約表現が Shalika 模型を持たないことを確認した。
5. $G = \mathrm{GSp}(2, \mathbf{R})$ の Whittaker 関数の明示公式を用いて、 $\mathrm{GSp}(2)$ の標準 L 関数とスピノール L 関数の積になると期待される複素 2 変数のゼータ積分である Bump-Friedberg-Ginzburg 積分の実素点における計算を実行した。Siegel 型放物部分群から誘導された一般主系列表現に対して、アルキメデスゼータ積分と局所 L 因子の積が一致するような Whittaker 関数を具体的に与えた。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 0件）

| | |
|---|-------------------------|
| 1. 著者名 Ishii Taku, Miyazaki Tadashi | 4. 巻 26 |
| 2. 論文標題 Calculus of archimedean Rankin-Selberg integrals with recurrence relations | 5. 発行年 2022年 |
| 3. 雑誌名 Representation Theory of the American Mathematical Society | 6. 最初と最後の頁 714 ~ 763 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/ert/618 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

| | |
|--|---------------------|
| 1. 著者名 Hirano Miki, Ishii Taku, Miyazaki Tadashi | 4. 巻 278 |
| 2. 論文標題 Archimedean zeta integrals for $GL(3) \times GL(2)$ | 5. 発行年 2022年 |
| 3. 雑誌名 Memoirs of the American Mathematical Society | 6. 最初と最後の頁 1-122 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/memo/1366 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

〔学会発表〕 計4件（うち招待講演 4件/うち国際学会 1件）

| |
|--|
| 1. 発表者名 石井卓 |
| 2. 発表標題 Generalized spherical functions and archimedean zeta integrals on $GSp(2, R)$ |
| 3. 学会等名 第2回仙台保型形式小集会 _ (招待講演) |
| 4. 発表年 2022年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 石井卓 |
| 2. 発表標題 Whittaker functions on $GL(4, R)$ and archimedean zeta integrals |
| 3. 学会等名 第8回京都保型形式研究集会 (招待講演) |
| 4. 発表年 2021年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 平野幹、石井卓、宮崎直 |
| 2. 発表標題 Whittaker functions on $GL(4, \mathbb{R})$ and archimedean zeta integrals |
| 3. 学会等名 保型形式、保型 L 関数とその周辺 (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2022年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 石井卓 |
| 2. 発表標題 非正則2次Siegel保型形式のFourier展開に現れる球関数について |
| 3. 学会等名 第65回代数学シンポジウム (招待講演) |
| 4. 発表年 2020年 |

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

| | | | |
|---------|---------------------------|-----------------------|----|
| 6. 研究組織 | 氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号) | 所属研究機関・部局・職 (機関番号) | 備考 |
|---------|---------------------------|-----------------------|----|

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

| | |
|--------------------------|----------------------|
| 国際研究集会 保型表現の解析的・数論的研究 | 開催年 2023年 ~ 2023年 |
|--------------------------|----------------------|

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

| | |
|---------|---------|
| 共同研究相手国 | 相手方研究機関 |
|---------|---------|