

令和 6 年 6 月 4 日現在

機関番号：32644

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2019～2023

課題番号：19K03454

研究課題名(和文) 対称性を通したK3曲面と有理曲面の研究

研究課題名(英文) Studies of K3 surfaces and rational surfaces through symmetry

研究代表者

瀧 真語 (Taki, Shingo)

東海大学・理学部・准教授

研究者番号：30609714

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：代数多様体の自己同型を調べることは基本的な問題である。特にK3曲面の自己同型を調べることは重要である。K3曲面は至る所消えない正則2形式を持つが、K3曲面に作用する有限群はそれへの作用によって「シンプレクティック」または「非シンプレクティック」と呼ばれる。本研究課題では、K3曲面上の有限位数の非シンプレクティック自己同型について、3つの視点から調べた。1つ目は、有限最大位数の自己同型を持つK3曲面の商曲面に関する研究。2つ目は、K3曲面の非純な非シンプレクティックの分類に関する研究。3つ目は、Galois点を持つ4次曲面のK3曲面的な特徴付けに関する研究。

研究成果の学術的意義や社会的意義

幾何学的対象を考察する際、それが持つ対称性がその特殊性を表していることがある。例えば、一般の三角形に対称性は無いが、二等辺三角形や正三角形のような特殊な三角形は「左右対称」や「120度の回転」など対称性を持つ。

本研究ではこのような視点の下、K3曲面とよばれる代数多様体の対称性を調べ、「K3曲面上のある種の特別な現象の背景には特殊な対称性が隠されている」ということを示した。

研究成果の概要(英文)：It is a fundamental problem to study automorphisms of algebraic varieties. In particular, studies on automorphisms of K3 surfaces are one of the important problems. By the definition of K3 surfaces, these have a nowhere vanishing holomorphic 2-form. A finite group which acts on K3 surfaces as automorphisms is called "symplectic" or "non-symplectic" if it acts trivially or non-trivially on a nowhere vanishing holomorphic 2-form, respectively. In this research project, study finite non-symplectic automorphisms on K3 surfaces from the following three view points. (1) A study on quotient surfaces of K3 surfaces with an automorphism of maximum order. (2) A study on non-purely non-symplectic automorphisms on K3 surfaces. (3) A study on characterization of quartic surfaces with Galois points as K3 surface

研究分野：代数幾何

キーワード：K3曲面 自己同型 商曲面 Galois点

## 様式 C - 19、F - 19 - 1 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

代数多様体の対称性を表す自己同型の研究は、古くから本質的で重要なものとされている。K3 曲面の非シンプレクティック自己同型は Nikulin をパイオニアとして、多くの数学者によって調べられていた。

K3 曲面上にどのような非シンプレクティック自己同型が存在するか？という問題に関しては、多くの場合、その位数に注目して調べられることが多い。素数位数の場合は統一的な研究結果があり、それを用いて素数べき位数の場合や合成数位数の場合でもオイラー関数の値が大きな場合について調べられていた。ただしこれら多くは「純な非シンプレクティック自己同型」であった。

### 2. 研究の目的

一言で言えば「K3 曲面上の特殊な対称性（自己同型）及びそれらによって統制される K3 曲面の幾何学を調べる」である。より詳しくは

(1) K3 曲面上の自己同型の分類

(2) 特殊な自己同型による K3 曲面の商曲面に関する考察

という課題である。

(1) は非純な非シンプレクティック自己同型（至るところ消えない正則 2 形式に非自明に作用するが、その作用の位数と自己同型の位数が異なる場合）の分類を目指したものである。(2) は特殊な自己同型による商特異点および商曲面の考察と、割る直前（つまり K3 曲面）の世界で、特異点を生む点（つまり固定点）のなかから特別な性質を持っている点を調べることを目的にしている。

### 3. 研究の方法

(1) に関しては、まず自己同型の位数を決定する。K3 曲面の有限自己同型の位数は 66 以下であるが、位数（のオイラー関数の値）が大きくなると、それだけで K3 曲面と自己同型の組みが決定してしまいがちである。そこで最も本質的と思われる位数 6 に注目した。非純なものを扱うわけなので、位数 6 の場合、至るところ消えない正則 2 形式への作用は位数 2 か位数 3 で作用する。この 2 通りの場合の詳細をシンプレクティック自己同型および素数位数の非シンプレクティック自己同型の先行研究を交えて考察していく。位数 6 の場合が落ち着いたら、奇数位数の場合についても同様の方法で考察を進める。

(2) でも割る自己同型の位数を決定する必要があるが、それよりも本質的なのは自己同型の固定点集合の詳細を調べることである。特に孤立固定点の個数や局所的な作用は商特異点の本質的な情報である。自己同型の位数を決定した後はその位数の約数位数のシンプレクティック自己同型の先行研究と（正則）レフシェッツ公式を用いて固定点集合を調べる。

固定点集合の中から特別な点を探すという事に関しては Galois 点に注目する。Galois 点はその定義から 4 次曲面として与えられる K3 曲面の話になるが、その先行研究はかなりよく整理されているので、それを用いる。また自然と Galois 群が 4 次曲面に自己同型として作用するので、K3 曲面の自己同型の理論を用いて考察を行う。また Galois 点の個数によっては Kummer 曲面の理論も適用することができる。

### 4. 研究成果

(1) は位数 6 の場合と奇数位数の場合について、非純な非シンプレクティック自己同型の固定点集合を決定した。一般に非純な非シンプレクティック自己同型の固定点集合は孤立固定点に限られるが、そこに現れる点の個数と局所的な作用を全て決定した。またそれらの孤立固定点を実現するような K3 曲面と自己同型の具体例も与えた。これらに関しては 2 つの論文

Nirai Shin-yashiki, [Shingo Taki](#), Non-purely non-symplectic automorphisms of order 6 on K3 surfaces, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 97 (2021), no. 8, 61--66.

と

[Shingo Taki](#), Non-purely non-symplectic automorphisms of odd order on K3 surfaces, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 99 (2023), no. 7, 43--47.

として出版済みである。

なお当初は非純に限らないような非シンプレクティック自己同型も視野に入れていたが、他のグループによって解決された。そのような事情もあり本研究課題の結果は非純の場合に限ったものになっている。

(2) K3 曲面の有限自己同型の最大位数の場合を調べた。自己同型の固定点集合を決定し、孤立固定点への局所的な作用（この自己同型で割った時に現れる特異点のタイプを決めるもの）を

明示的に与えた。この時は K3 曲面と自己同型の組みに一意性がありえ、K3 曲面の方程式が知られている事を利用して、特異点の位置も決定した。なお商曲面としては指数 11 の対数的 Enriques 曲面である。これに関しては論文

Shingo Taki, Singularities of quotient surfaces of K3 surfaces with an automorphism of maximum order, Math. Rep. 25(75) (2023), no.3, 413--423.

として出版済みである。

Galois 点を持つ 4 次曲面については、最も一般的な場合 (Galois 点を 1 個持つ場合) と最も特殊な場合 (Galois 点を 8 個持つ場合) について調べた。Galois 点の定義から、4 次曲面に位数 3 の自己同型が作用するが、その自己同型は非シンプレクティックであることが分かる。そこで「4 次曲面と位数 3 の自己同型」という組みで考えることにより、Eisenstein K3 曲面の言葉に翻訳することができた。また適当な条件をみだす Eisenstein K3 曲面に対しては、その固定曲線を用いた線形系を利用することで Galois 埋め込みを構成することができ、これにより Galois 点を (1 個) 持つ場合は適当な Eisenstein K3 曲面と一対一に対応することがわかった。Galois 点を 8 個持つ場合はピカール数が 20 の K3 曲面であることが知られていたため、K3 曲面としての特徴付けとして超越格子を決定した。これに関しては、論文としてまとめており、現在投稿中である。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 4件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 4件）

1. 著者名 Taki, Shingo	4. 巻 78
2. 論文標題 Automorphisms of K3 surfaces and their applications	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 RIMS Kokyuroku Bessatsu	6. 最初と最後の頁 179-198
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Shin-yashiki Nirai, Taki Shingo	4. 巻 97
2. 論文標題 Non-purely non-symplectic automorphisms of order 6 on $\$K3\$$ surfaces	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences	6. 最初と最後の頁 61-66
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3792/pjaa.97.012	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 TAKI SHINGO, Tokai University,	4. 巻 25(75)
2. 論文標題 SINGULARITIES OF QUOTIENT SURFACES OF K3 SURFACES	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Mathematical Reports	6. 最初と最後の頁 413 ~ 423
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.59277/mrar.2023.25.75.3.413	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Taki Shingo	4. 巻 99
2. 論文標題 Non-purely non-symplectic automorphisms of odd order on K3 surfaces	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences	6. 最初と最後の頁 43--47
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3792/pjaa.99.009	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

〔学会発表〕 計5件（うち招待講演 5件 / うち国際学会 1件）

1. 発表者名 瀧 真語
2. 発表標題 有限自己同型を持つK3曲面について
3. 学会等名 早稲田整数論セミナー（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Shingo Taki
2. 発表標題 Automorphisms of high order on K3 surfaces
3. 学会等名 Degenerations, algebraic surfaces and related topics（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 瀧 真語
2. 発表標題 K3 surfaces of type 19 and 20
3. 学会等名 湯布院代数幾何学ワークショップ（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 瀧 真語
2. 発表標題 K3曲面とGalois点
3. 学会等名 第30回代数曲面ワークショップ（招待講演）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 瀧 真語
2. 発表標題 Galois点を持つ4次曲面とEisenstein K3曲面
3. 学会等名 第21回代数曲線論シンポジウム（招待講演）
4. 発表年 2023年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

国際研究集会 K3, Enriques Surfaces and Related Topics	開催年 2023年～2023年
--	--------------------

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------