

令和 5 年 6 月 8 日現在

機関番号：13301

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2019～2022

課題番号：19K03463

研究課題名（和文）ガウス写像の値分布と曲面の大域的性質への応用

研究課題名（英文）Study of value distribution of Gauss maps and its applications to global property of immersed surfaces in space forms

研究代表者

川上 裕（Kawakami, Yu）

金沢大学・数物科学系・准教授

研究者番号：60532356

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,500,000円

研究成果の概要（和文）：ローレンツ・ミンコフスキー空間内の空間的グラフ超曲面と時間的グラフ超曲面に対する、ある勾配評価を仮定したハインツ型の平均曲率の評価を導くことができた。この系として、空間的平均曲率一定entireグラフ超曲面に対するベルンシュタイン型定理を示すことができた。また、曲面は解析的延長を持たないことを示すために「解析的完備」という概念を導入し、その判定条件を与え、それを3次元ド・ジッター空間内の平均曲率が1の曲面に対するトライノイドに対して応用することで、いくつかのタイプの解析的完備性を示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

曲率の条件を持つ空間内の曲面は、現実社会の物理的現象としてあらわれるものの数学的モデルとなっていることが多い。このことから、曲率の条件を持つ空間内の曲面の性質を調べる研究で得られた成果は、数学にとどまらず、理工学のさまざまな分野の研究に応用されている。本課題の手法は、そのような曲面の性質をガウス写像という視点で調べるものである。研究成果は、曲率を条件に持つ空間内の曲面の実現性の問題の理解を深めるものであり、幾何学及び解析学の研究の発展に意義があると考えられる。

研究成果の概要（英文）：We provide a unified description of Heinz-type mean curvature estimates under an assumption on the gradient bound for space-like graphs and time-like graphs in the Lorentz-Minkowski space. As a corollary, we show a Bernstein-type theorem for entire space-like constant mean curvature graphs. Moreover, we show that a notion of "analytic completeness" of the image of a real analytic map implies the map admits no analytic completeness. We also a useful extension for that notion of analytic completeness by defining arc-properness of continuous maps. As an application, we judge the analytic completeness of a certain class of constant mean curvature surfaces or their analytic extensions in the de Sitter 3-space.

研究分野：微分幾何学，幾何解析学，複素解析学

キーワード：幾何学 解析学 曲面論 値分布論 ガウス写像 極小曲面 平均曲率一定曲面 解析的延長

1. 研究開始当初の背景

曲率条件を持つ空間内の曲面・部分多様体は、現実社会の物理的現象として現れるものの数学的モデルとなっていることが多い。実際、平均曲率が恒等的にゼロの曲面である極小曲面は石鹸膜の、平均曲率一定曲面はシャボン玉の数学的モデルである。このような事情から、曲率条件を持つ空間内の曲面の性質を調べる研究は古くから活発に研究され、そこで得られた成果は理工学のみならずさまざまな分野に応用されている。曲率条件を持つ曲面の例の構成や大域的性質を調べることは非常に難しい。一方で、ユークリッド空間内の極小曲面論を雛型とする、ガウス写像の値分布論的性質の視点から曲面の大域的性質を調べる方法が存在する。この研究の特色は解析的に示すことが難しい性質を幾何的に理解しやすい状況で導くことができることである。ただ、この研究はまだ解明されていない事実が存在する。例えば、ユークリッド空間内の有限全曲率完備極小曲面のガウス写像の除外値問題やさまざまな空間内の曲面・部分多様体のクラスにおけるベルンシュタイン型定理の問題などが挙げられる。

2. 研究の目的

曲率条件を持つ曲面・部分多様体の例の構成や大域的性質を調べることは非常に難しい。例えば、極小曲面の場合、領域上に定義されたグラフ曲面が極小曲面になる条件は、曲面を定める関数のみならず偏微分方程式が非線形楕円型となることから、そこから解を直接導くことは難しく、さらにベルンシュタインの定理と呼ばれる「3次元ユークリッド空間内の極小 entire グラフ曲面は平面のみである」という非自明な結果が成り立つ。しかし、曲面に等温座標系を入れてガウス写像に着目すると、極小曲面のガウス写像はリーマン球面への有理型関数となる。さらに、極小曲面に対しては、ガウス写像と正則1次微分形式の組により構成できるワイエルシュトラスの表現公式と呼ばれる結果が成り立ち、そのおかげでエネパーの極小曲面やコスタの極小曲面といった非自明な極小曲面の例を構成できるようになった。また、グラフ曲面のガウス写像の像はリーマン球面内の半球面内に含まれていることから、ベルンシュタインの定理はガウス写像の視点から見ると、複素解析学におけるリュービルの定理の言い換えであることがわかる。極小曲面論における「ベルンシュタインの定理」と複素解析学における「リュービルの定理」との関係のように、ガウス写像の像の性質を調べることで、曲面の大域的性質を幾何的に理解しやすい状況で導くことができることもある。本研究では、空間内の曲面・部分多様体の大域的性質をガウス写像の性質から導くことのできる理論を確立することを目的としている。

3. 研究の方法

本研究課題では、主に「(1) ローレンツ・ミンコフスキー空間内のグラフ超曲面の大域的性質に関する研究」と「(2) 3次元ド・ジッター空間内の平均曲率が1の曲面の解析的延長に関する研究」を行った。主な研究方法は以下の通りである：

(1) ローレンツ・ミンコフスキー空間内の極大グラフに対してはカラビ・ベルンシュタインの定理と呼ばれる entire の場合に空間的平面のみとなるという一意性定理が成り立つ。一方、ユークリッド空間内のときとは異なり、空間的平均曲率一定 entire グラフに対しては一意性定理が成り立たない。実際、双曲面がその例となる。しかし、ある種の勾配評価を仮定したときにリュービル型定理が成り立つことをガウス写像の値分布論的結果から示すことができるが、その証明は大森-ヤウの最大値の原理を用いるなど難しく、また仮定している勾配評価が最良のものかどうかわかっていなかった。そこでユークリッド空間のグラフ超曲面に対して成り立つ、ハインツ型の平均曲率の評価をローレンツ・ミンコフスキー空間内のグラフ超曲面に対しても適用できないかを検討した。ユークリッド空間内の場合、ハインツ型の平均曲率の評価は勾配評価といった特殊な仮定を用いずに示すことができる。これは勾配評価が一律に1未満で評価できることに対応している。一方、ローレンツ・ミンコフスキー空間の場合、一般には勾配評価に現れる量が発散するので、ある種の関数で評価する必要が生じる。それをもとに空間的平均曲率一定 entire グラフ超曲面および時間的 entire グラフ超曲面の性質を調べた。

(2) 3次元ド・ジッター空間内の平均曲率が1の曲面である種の特異点を許容したクラス(平均曲率一定面)の解析的延長の問題の研究は、梅原雅顕氏、山田光太郎氏、國分雅敏氏、ウェインラスマン氏、藤森祥一氏との共同研究ですでにさまざまな結果を得ているが、解析的延長ができない場合をどう示しているのかわからなかった。そこで、「解析的完備」という概念を導入して、曲面が解析的延長をもつかどうか調べた。

4. 研究成果

(1) 本田淳史氏, 小磯深幸氏, 通俊祐氏との共同研究で, ローレンツ・ミンコフスキー空間内の空間的グラフ超曲面と時間的超曲面に対する, ある勾配評価を仮定したハインツ型の平均曲率の評価を導くことができた. また, この結果の系として, 平均曲率一定 entire グラフ超曲面に対する平均曲率の消滅定理を統一的に得ることができた. この結果を用いることで, これまで知られていたグラフ超曲面に対するリュービル型定理を統一的かつ簡明に導くことができた. 特に, 双曲的角度の評価を付加することで, entire 空間的平均曲率一定グラフ超曲面に対するベルンシュタイン型定理を示すことができた. この結果は最良なものとなっている.

(2) 梅原雅顕氏, 山田光太郎氏, 國分雅敏氏, ウェインラスマン氏, 藤森祥一氏, S-D. Yang 氏との共同研究で, 曲面が解析的延長を持たないことを示すために「解析的完備」という概念を導入し, その判定法を与え, それをもとに 3 次元ド・ジッター空間内の平均曲率が 1 となるトライノイドの幾つかの例外型のクラスにおける解析的完備性を示した.

(3) 申請者はこれまでガウス写像値分布論的性質の研究でさまざまな成果を得てきた. 例えば, 3 次元ユークリッド空間内の有限全曲率完備極小曲面のガウス写像の完全分岐値数が 2.5 の例の発見や, それを受けて宮岡礼子氏, 小林亮一先生との共同研究で得た, ガウス写像の除外値数や完全分岐値数の幾何学的量による評価, 3 次元アファイン空間内の弱完備な非固有アファイン波面のラグランジアンガウス写像の除外値数の上限が 3 であること, さまざまな曲面のクラスにおける除外値数の上限は, 完備等角計量のオーダと 2 (これはガウス写像の値域にあたるリーマン球面のオイラー標数から来ている) の和と一致することなどが挙げられる. 以上のような内容を含むこれまでの成果をまとめた英文のレビュー論文を発表した.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 4件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Fujimori S., Kawakami Y., Kokubu M., Rossman W., Umehara M., Yamada K.	4. 巻 62
2. 論文標題 Analytic extensions of constant mean curvature one catenoids in de Sitter 3-space	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Mathematical Journal of Okayama University	6. 最初と最後の頁 179 ~ 195
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Fujimori S., Kawakami Y., Kokubu M., Rossman W., Umehara M., Yamada K., Yang S.-D.	4. 巻 84
2. 論文標題 Analytic extensions of constant mean curvature one geometric catenoids in de Sitter 3-space	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Differential Geometry and its Applications	6. 最初と最後の頁 101924 ~ 101924
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.difgeo.2022.101924	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Honda Atsufumi, Kawakami Yu, Koiso Miyuki, Tori Syunsuke	4. 巻 34
2. 論文標題 Heinz-type mean curvature estimates in Lorentz-Minkowski space	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Revista Matematica Complutense	6. 最初と最後の頁 641 ~ 651
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s13163-020-00373-9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Kawakami Yu	4. 巻 33
2. 論文標題 Value distribution for the Gauss maps of various classes of surfaces	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Sugaku Expositions	6. 最初と最後の頁 223 ~ 237
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/suga/454	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

[学会発表] 計12件(うち招待講演 9件/うち国際学会 1件)

1. 発表者名 Yu Kawakami
2. 発表標題 Heinz-type mean curvature estimates and its applications
3. 学会等名 RIMS workshop, Application of Harmonic Maps and Higgs Bundles to Differential Geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 川上 裕
2. 発表標題 Recent advances in value distribution of the Gauss map of minimal surfaces
3. 学会等名 研究集会「リーマン面に関連する位相幾何学」(招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Pham Hoang Ha, 川上 裕, 渡邊 元嗣
2. 発表標題 有限全曲率完備極小曲面のガウス写像の完全分岐値数について
3. 学会等名 2022年度日本数学会秋季総合分科会一般講演
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 川上 裕
2. 発表標題 Recent development in value distribution theory of the Gauss map of complete minimal surfaces
3. 学会等名 第28回複素幾何シンポジウム(金沢)2022(招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 川上裕
2. 発表標題 Bernstein型問題の研究の最近の進展について
3. 学会等名 東京理科大学理工学部数学科談話会（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 川上裕
2. 発表標題 Lorentz-Minkowski空間における平均曲率に関するHeniz型評価について
3. 学会等名 九州大学幾何学セミナー（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 川上裕
2. 発表標題 Recent advances in Bernstein-type problems
3. 学会等名 第87回金沢解析セミナー
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 川上裕
2. 発表標題 Bernstein型問題の歴史と最近の発展
3. 学会等名 福岡大学幾何学セミナー（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Yu Kawakami
2. 発表標題 Recent advances in value distribution of the Gauss map of a complete minimal surface
3. 学会等名 Workshop on Surface Theory -UY60- (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Yu Kawakami, Mototusgu Watanabe
2. 発表標題 Recent advances in value distribution of the Gauss map of complete minimal surfaces
3. 学会等名 Workshop on Differential Geometry and Geometric Analysis (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 川上裕、本田淳史、小磯深幸、通峻祐
2. 発表標題 Lorentz-Minkowski空間におけるHeinz型の平均曲率の評価について
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会幾何学分科会一般講演
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 川上裕
2. 発表標題 Bernstein型問題の最近の進展について
3. 学会等名 大阪市立大学 幾何学講演会 (招待講演)
4. 発表年 2021年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------