

令和 5 年 6 月 6 日現在

機関番号：24405

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2019～2022

課題番号：19K03472

研究課題名(和文) トーラス群作用の幾何，トポロジーと組合せ論

研究課題名(英文) Geometry and topology of torus actions and combinatorics

研究代表者

栴田 幹也 (Masuda, Mikiya)

大阪公立大学・大学院理学研究科・特任教授

研究者番号：00143371

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：Eunjeong Lee氏，Seonjeong Park氏と旗多様体におけるトーラス軌道の閉包の幾何とトポロジーおよびそれに関連する組合せ論の研究を続けた。特に，これまでの成果をHandbook of Combinatorial Algebraic Geometry: Subvarieties of the Flag Varietyの1章として纏めた。また，佐藤敬志氏とStanley-Stembridge予想の解決を目指して regular semisimple Hessenberg varietyのコホモロジー環の具体的記述とそれ状の対称群作用を調べた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

旗多様体におけるトーラス軌道の閉包の研究は，1980年代にGelfand-Serganova, Kryachkoらによって初められた。その後，トーラス軌道の閉包の特異性など調べられているが，トポロジーに関しては研究されていなかったように思われる。我々は，旗多様体におけるSchubert variety もっと一般に Richardson variety における一般的なトーラス軌道の閉包の幾何・トポロジーと組合せ論の関係を調べた。これは今後の研究の礎になると期待している。

研究成果の概要(英文)：I continued joint work with Eunjeong Lee and Seonjeong Park on the geometry and topology of torus orbit closures in the flag variety and related combinatorics. In particular, we wrote a survey article on this topic as a chapter of the Handbook of Combinatorial Algebraic Geometry: Subvarieties of the Flag Variety. I also worked with Takashi Sato on the cohomology ring of a regular semisimple Hessenberg variety. The ultimate goal of this work is to prove a long standing Stanley-Stembridge conjecture in graph theory affirmatively.

研究分野：Topology

キーワード：Toric Topology convex polytope torus orbit closure flag variety Hessenberg variety

1. 研究開始当初の背景

[A] 旗多様体におけるトーラス軌道の閉包のトポロジー・幾何と組合せ論
複素 n 次元ベクトル空間の部分空間の列からなる旗多様体 $Fl(n)$ は、トーラス作用をもち、その不動点集合は n 次置換群と同一視できる。旗多様体におけるトーラス軌道の閉包はトーリック多様体となる。このように、旗多様体の中にトーリック多様体が自然に存在する。トーラス軌道が generic な場合、その閉包は置換多様体（英語では permutohedral variety）と呼ばれるものになることが知られている。対応する扇は A 型の Weyl chamber からなる。置換多様体は、 n 次の置換を頂点とした凸多面体（置換多面体、英語では permutohedron）をモーメント写像の像としてもち、組合せ論の立場からも興味ある対象である。また、置換多様体とグラフの彩色多項式を結びつける June Huh による目覚ましい研究があり、置換多様体の重要性が認識されることとなった。

[B] Regular semisimple Hessenberg variety のコホモロジー
Brosnan-Chow による Shareshian-Wachs 予想の解決により、グラフ理論における Stanley-Stembridge 予想が、旗多様体の部分多様体である regular semisimple Hessenberg variety のコホモロジーにおける対称群作用を調べることと同じことであることが分かり、これにより、Stanley-Stembridge 予想を幾何・トポロジーを用いて解決することが可能となった。

2. 研究の目的

[A] 不思議なことに、旗多様体の generic でないトーラス軌道の閉包の幾何学的性質は、1980 年代の Gelfand-Serganova や Klyachko による最初の研究以降余り調べられていない。しかしながら、置換多様体の重要性に鑑みてもこれは研究するべき対象と思われる。本研究の究極の目的は、旗多様体におけるすべてのトーラス軌道の閉包の分類および幾何学的性質（特異点があるかどうか、トーリック多様体としての扇、ポアンカレ多項式など）を明らかにすることであった。

[B] Regular semisimple Hessenberg variety のコホモロジーを調べて Stanley-Stembridge 予想の解決を目指す。

3. 研究の方法

多くの具体例を見て、一般的な事実を探る。

4 . 研究成果

[A]に関して

(1) 数年前、Eunjeong Lee 氏と Schubert variety 内の generic torus orbit closure のトポロジーを調べ、そのポアンカレ多項式に関する予想を立てた。この予想は山中仁氏により解決されたが、Lee-Park-Song との共同研究で組み合わせ論的別証明を得た。

(2) 旗多様体の部分多様体である Richardson variety の generic torus orbit closure として、多角形分割と対応するものがあることが分かった。これらの同型類を数え上げると、Wedderburn-Etherington と呼ばれる古くから知られている数列が現れた。

(3) トーラス軌道の閉包の不動点集合は Coxeter matroid と呼ばれる興味ある有限集合である。これらは置換多面体の 1-skelton から得られるグラフの頂点集合の部分集合と思えるが、グラフ距離の観点からある種の最短性を持っていることを Eunjeong Lee と Seonjeong Park との共同研究で示した。

[B]に関して

(1) コホモロジー環が次数 2 の元で生成される regular semisimple Hessenberg variety は double lollipop 型と呼ばれるものであることを示した。

(2) 上記(1)の場合にコホモロジー環の具体的な表示を与え、対称群の表現を具体的に見。コホモロジー環の具体的な表示はやや複雑であるが、一般的な場合への足がかりとなると期待している。なお系として、double lollipop の場合には Stanley-Stembridge 予想が肯定的であることが分かる(論文準備中)

(3) Ayzenberg-Buchstaber は regular semisimple Hessenberg variety の twin を定義したが、我々はそのコホモロジーが本質的に unicellular LLT 多項式であることを見出した。このような関係があるのは薄々感じていたことではあるが、きちんとした証明を与えることができたのは意義あることと思う。

以下は、上記以外のテーマに関する成果

(1) 東谷 - 栗本氏との共同研究で、toric Fano 多様体に対してコホモロジー剛性(コホモロジー環が同型ならば微分同相か)が成立するかを調べ、複素 3 次元では成立し、4 次元の場合は 2 つを除いて成立することを示した。なお、この例外的な 2 つはコホモロジー環は同型で Pontryagin 類も同じだが、微分同相かどうかは不明である。また、ピカール群が大きい場合もコホモロジー剛性が成立することを示した。

(2) Cho-Lee-Park との共同研究において、「toric Fano 多様体の間に第一 Chern 類を保つコホモロジー環の同型写像があれば、toric Fano 多様体は代数多様体として同型であろう」という予想を立て、Fano Bott 多様体の場合には正しいことを示した。その系として、monotone symplectic 多様体に対する McDuff の問題が Fano Bott 多様体のときには正しいことが分かった。

(3) Anton Ayzenberg 氏と共同で、複雑度 1 のトーラス群作用が、equivariantly formal で generic という条件を満たしているとき、軌道空間

が球面となることを示した。この結果は、これまで知られていた(Buchstaber-Terzic, Karshon-Tolman) による結果を包括するものである。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計9件（うち査読付論文 9件/うち国際共著 6件/うちオープンアクセス 3件）

1. 著者名 Eunjeong Lee, Mikiya Masuda, and Seonjeong Park	4. 巻 315
2. 論文標題 On Schubert varieties of complexity one	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Pacific J. Math.	6. 最初と最後の頁 419-447
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2140/pjm.2021.315.419	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Akihiro Higashitani, Kazuki Kurimoto, Mikiya Masuda	4. 巻 59
2. 論文標題 Cohomological rigidity for toric Fano manifolds of small dimensions or large Picard numbers	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Osaka J. Math.	6. 最初と最後の頁 177-225
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 L. Yu and M. Masuda	4. 巻 42
2. 論文標題 On descriptions of products of simplices	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Chinese Ann. Math. Ser. B	6. 最初と最後の頁 777-790
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s11401-021-0290-5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Eunjeong Lee, Mikiya Masuda, and Seonjeong Park	4. 巻 33
2. 論文標題 Torus orbit closures in flag varieties and retractions on Weyl groups	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Inter. J. Math.	6. 最初と最後の頁 2250028-1 21
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1142/S0129167X22500288	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Eunjeong Lee, Mikiya Masuda, and Seonjeong Park	4. 巻 179
2. 論文標題 Toric Bruhat interval polytopes	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Combinatorial Theory, Series A	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jcta.2020.105387	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Takuro Abe, Tatsuya Horiguchi, Mikiya Masuda Satoshi Murai and Takashi Sato	4. 巻 764
2. 論文標題 Hessenberg varieties and hyperplane arrangements	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 J. Reine Angew. Math.	6. 最初と最後の頁 241-286
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1515/crelle-2018-0039	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Sho Hasui, Hideya Kuwata, Mikiya Masuda, Seonjeong Park	4. 巻 16
2. 論文標題 Classification of toric manifolds over an n-cube with one vertex cut	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Int. Math. Res. Not. IMRN	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1093/imrn/rny161	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Eunjeong Lee and Mikiya Masuda	4. 巻 170
2. 論文標題 Generic torus orbit closures in Schubert varieties	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Combinatorial Theory, Series A	6. 最初と最後の頁 105-143
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jcta.2019.105143	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 M. Harada, T. Horiguchi, M. Masuda, and S. Park	4. 巻 305
2. 論文標題 The volume polynomial of regular semisimple Hessenberg varieties and the Gelfand-Zetlin polytope	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics	6. 最初と最後の頁 318-344
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1134/S0081543819030192	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

[学会発表] 計14件 (うち招待講演 12件 / うち国際学会 9件)

1. 発表者名 栞田幹也
2. 発表標題 Smooth toric Richardson varieties of Catalan type and Wedderburn-Etherington numbers
3. 学会等名 数理解析研究所 New developments of transformation groups
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Mikiya Masuda
2. 発表標題 Regular semisimple Hessenberg varieties whose cohomology rings are generated by degree two elements
3. 学会等名 Special session on Toric Topology at the KMS meeting (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Mikiya Masuda
2. 発表標題 Hessenberg varieties and the Stanley-Stembridge conjecture in graph theory
3. 学会等名 International School, Toric Topology and Combinatorics, Sochi (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 栞田幹也
2. 発表標題 ヘッセンバーグ多様体とStanley-Stembridge予想
3. 学会等名 代数的位相幾何学の軌跡と展望, ~山崎正之先生退職祝賀研究集会~ (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Mikiya Masuda
2. 発表標題 Some relations between topology and combinatorics
3. 学会等名 Autumn online school, Applications of topology and geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 栞田幹也
2. 発表標題 トールリクトポロジ-におけるコホモロジ-剛性問題
3. 学会等名 日本数学会 (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Mikiya Masuda
2. 発表標題 Invariants of the cohomology rings of the permutohedral varieties
3. 学会等名 Topology and Geometry of Group Actions (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Mikiya Masuda
2. 発表標題 Invariants of the cohomology rings of the permutohedral varieties
3. 学会等名 kpa70, Conference celebrating the 70th birthday of Prof. Krzysztof Pawalowski (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Mikiya Masuda
2. 発表標題 Quotients of toric orbifolds by reflections
3. 学会等名 Polyhedral Products Seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Mikiya Masuda
2. 発表標題 Unique toric structures on Fano Bott manifolds
3. 学会等名 kpa70+, Transformation Group Theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Mikiya Masuda
2. 発表標題 Torus orbit closures in the flag varieties
3. 学会等名 Topology, Geometry, and Dynamics: Rokhlin-100 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 栞田幹也
2. 発表標題 旗多様体のトーラス軌道の閉包とワイル群上の距離
3. 学会等名 変換群とその応用、数理解析研究所
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 栞田幹也
2. 発表標題 群作用と多面体 - トーリックトポロジーの観点から -
3. 学会等名 トポロジーシンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 栞田幹也
2. 発表標題 Torus orbit closures in the flag varieties
3. 学会等名 第46回変換群論シンポジウム (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計2件

国際研究集会 Toric Topology 2021 in Osaka	開催年 2021年～2021年
国際研究集会 Toric Topology 2019 in Okayama	開催年 2019年～2019年

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
ロシア連邦	HSE			