様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　５ 年　６ 月 １３ 日現在

機関番号：３２６４１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2019～2022
課題番号：１９Ｋ０３４７５

研究課題名（和文）リー群の表現の分解に関連するシンプレクティック商の研究

研究課題名（英文）Study on symplectic quotients concerned with decompositions of representations of Lie groups

研究代表者
高倉　樹（Takakura, Tatsuru）

中央大学・理工学部・教授

研究者番号：３０２６８９７４

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,100,000円

研究成果の概要（和文）：コンパクト・リー群に付随して定まる重複度多様体や多重ウェイト多様体について研究を行い、以下の結果を得た。第一に、A型の特殊ベクトル体積関数の微分方程式による特徴付けを論文として発表した。また、その結果の多重ウェイト多様体のコホモロジー環への応用を論文にまとめた。第二に、A型ベクトル体積関数に関する Lidskii の定理を、ワイル群の作用から定まるルート系の基底の族に関する等式へと一般化した。第三に、一般のベクトル系に対して、任意の chamber 上のベクトル体積関数を特徴づける微分方程式系の表示に関する予想を得た。また、これらの研究成果の内容を、いくつかの国内の研究集会で発表した。

研究成果の学術的意義や社会的意義
リー群の表現の分解に関連する重要な空間族の組織的構成、それらの各種不変量の決定と同型類や大域的構造の深い理解、またその過程における表現論や組合せ論への寄与、等が、学術的意義として挙げられる。また、個々の具体例における計算過程や計算結果に特徴的な簡明さがある点は、本研究の特色・独創性の一つと考えられる。さらに、他分野との関連が判明し、派生する問題と予想もいくつか得られたことは、今後の研究の広がりを示唆している。

研究成果の概要（英文）：We studied the multiplicity varieties and multiple weight varieties associated with a compact Lie group, and obtained the results as follows. First, we published the paper on a characterization of the special vector volume function of type A, by means of a system of differential equations. Also, we applied it to the cohomology rings of special multiple weight varieties. Second, we generalized a theorem by Lidskii on the vector volume functions of type A to an identity of the family, defined by the action of the Weyl group, of bases for the root system. Third, for a general sequence of vectors, we obtained a conjecture about a presentation of a system of differential equations which characterizes the vector volume function over any chamber. We gave presentations about the results as above in some domestic conferences.

研究分野：位相幾何学

キーワード：シンプレクティック商　余随伴軌道　ルート系　ウェイト多様体　体積関数　多変量スプライン

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

リー群の作用をもつシンプレクティック多様体に対し、群作用による単なる商ではなく、ある一部分（それは運動量写像を用いて記述される）の商を考えると、再びシンプレクティック多様体になる。これをシンプレクティック商と呼ぶ。各種のモジュライ空間がこのような構成で得られることからその重要性が多方面で認識されており、また、シンプレクティック多様体の族を構成的に与える方法としても有効とされている。

さて、ある種の同変指数を考えることにより、リー群の作用をもつシンプレクティック多様体と、リー群の表現との対応が得られる。群の表現においては、各種の操作（直和・テンソル積等）が標準的に定まるが、多様体におけるこれらの対応物がやはり自然な形で存在する。例えば、表現のテンソル積には多様体の直積が対応する。そして、表現の既約分解（特に、各既約成分の重複度）や、部分群の表現としての分岐則の対応物を与えるのが、シンプレクティック商であることが知られている。

このように、群作用をもつシンプレクティック多様体とその商の構造は、群の表現論の幾何学的な側面を表しており、非常に豊かな構造を有するものと考えられる。そこでは、空間の幾何とトポロジー、表現論、凸体の組合せ論がより一層興味深い形で関わりあうことが期待される。

２．研究の目的

本研究の目的は、以下の２つである。

Ａ．リー群の表現の分解の幾何学的対応物である、余随伴軌道（旗多様体）に付随するシンプレクティック商とその部分多様体について、その大域的構造を明らかにすること。
Ｂ．上記Ａの過程に現れる各種の不変量の代数的・表現論的・組合せ的構造を詳しく調べること。

目的Ａは、リー群の余随伴軌道たちから得られるシンプレクティック商という「よいクラス」の空間について、その位相構造や、ラグランジュ部分多様体・シンプレクティック部分多様体、そして滑層構造の詳細を含めた大域的構造を、各種の不変量を用いて調べることを意図している。ここでの不変量としては、指数・特性数・シンプレクティック体積、および（交叉）コホモロジー環等を想定しているが、目的Ｂは、その背後にある各種の凸体の諸構造、ベクトル分割関数・ベクトル体積関数、および関連する超幾何関数を、代数的・表現論的・組合せ的立場から詳しく調べることを意図とする。

これらのテーマは代数・幾何・解析が豊かに交錯する好例であり、個々の具体例における計算過程や計算結果自体にも意義がある。また本研究の意義・波及効果として、意味のあるよいクラスの空間の組織的構成、それらの各種不変量の決定と大域的構造の深い理解、およびその過程における表現論や組合せ論への寄与、等が挙げられる。

３．研究の方法

研究計画調書・交付申請書の研究目的欄に挙げた具体的な問題・目標にしたがって研究を進める。

具体的な研究方法としては、期間全体を通して
「各地の研究者を訪問・招聘し、議論・情報交換を行うこと」
「国内外の関連する研究集会に積極的に参加し、議論・情報交換と資料収集を行うこと」
「情報・文献の収集を幅広く行うこと」
「数値計算・数式処理を効果的に行うこと」
を基本とする。申請した研究経費はすべて、これらの事項の遂行のために用いる。

４．研究成果

研究期間全体を通じて、コンパクト・リー群の余随伴軌道（旗多様体）に付随して定まる重複度多様体や多重ウェイト多様体について、同変指数、体積関数、およびコホモロジー環等の不変量についての研究を行った。

また同時に、上記の空間の代数的・組合せ的対応物である、リー群・リー環の既約表現の族からテンソル積・部分空間などの操作により得られる次数付きベクトル空間の構造についての研究を行った。それらは各種の表現の分解における重複度と深く関連する。具体的には、ベクトル

分割関数や、その連続版であるベクトル体積関数が重要な対象となる。
　これらに関して、本研究期間中に得られた結果は以下の通りである。

(1) 「良い chamber」に対する A 型のベクトル体積関数がある微分方程式系によって特徴づけられるという結果を論文として専門誌に発表した。またその結果の応用として、A 型の特殊多重ウェイト多様体のコホモロジー環の表示が得られることを論文にまとめた。この結果は、シンプレクティック多様体のトポロジーの研究における体積関数の重要性を示すものであり、本研究課題の根底にあるアイデアを端的に表している。

(2) A 型ベクトル体積関数に関して、「良い chamber」に対する体積関数を用いて他の chamber 上の体積関数を表示することができるという Lidskii の定理を、ワイル群の作用から定まるルート系の基底の族に関する等式へと抽象化・一般化した。その際、A 型ルート系に付随するある多変数有理関数族の一次独立性の証明が鍵となる。また、重み付きの場合の同様の等式も得られた。

(3) ルート系とは限らない一般のベクトル系に対して、任意の chamber 上のベクトル体積関数を特徴づける微分方程式系の具体的表示について、ある予想を得た。また、低ランクのルート系に対してこの予想が正しいことを確認した。この予想が正しければ、それは多重スプライン関数の理論においてこれまで得られている結果の精密化を与えることになる。この予想の証明のためには、微分方程式系をあるトーリック多様体のコホモロジー環の構造と比較することが必要だと思われるが、その一般的な解明はそれ自体興味深い。なお、この予想を認めると、ベクトル体積関数の理論において、局所的考察（すなわち個々の chamber 上での考察）に関しては一区切りがつくことになり、今後は大域的な性質の考察が問題となると考えられる。

(4) 特殊重複度多様体と特殊ウェイト多様体の間の同型対応の存在問題は、非アーベル商とアーベル商の間の非自明な対応関係を与えるものとして興味深いが、現在のところ糸口が見つかっていない。さらに、Demazure 加群やアフィン・リー環の既約表現のウェイトの重複度の漸近挙動や、ウェイト多様体の複素的対応物についての予想（定義体を有限体にしたときの点の個数と、有限体上の一般線形群の表現の重複度が等しいという予想)、および各種種の部分多様体の考察等は、未解決のまま残されている。引き続き、今後の課題としたい。

　また、上記の研究成果の内容を、いくつかの国内の研究集会で発表した。なお、2020～2022 年度に渡り国内外出張のほとんどを取り止めざるを得なかったため、研究の遂行に遅れが生じた。そのため、補助事業期間を１年間延長した。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計1件（うち査読付論文　1件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　0件）

１．著者名 Takayuki Negishi, Yuki Sugiyama and Tatsuru Takakura	４．巻 27
２．論文標題 On Volume Functions of Special Flow Polytopes Associated to the Root System of Type A	５．発行年 2020年
３．雑誌名 The Electronic Journal of Combinatorics	６．最初と最後の頁 P4.56
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.37236/9062	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕　計2件（うち招待講演　0件／うち国際学会　0件）

１．発表者名 高倉　樹
２．発表標題 Kostant function に対する Lidskii の公式と微分方程式系について
３．学会等名 研究集会「接触構造、特異点、微分方程式及びその周辺」
４．発表年 2023年

１．発表者名 高倉　樹
２．発表標題 On non-abelian localization theorems
３．学会等名 研究集会「Geometric Quantization and Related Topics」
４．発表年 2023年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関