

令和 6 年 6 月 24 日現在

機関番号：32660

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2019～2023

課題番号：19K03478

研究課題名（和文）対称空間の対蹠集合と関連する幾何学の研究

研究課題名（英文）Study on antipodal sets of symmetric spaces and related geometry

研究代表者

田中 真紀子（Tanaka, Makiko）

東京理科大学・創域理工学部数理科学科・教授

研究者番号：20255623

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,300,000円

研究成果の概要（和文）：いくつかの古典型コンパクト対称空間とその商空間の極大対蹠集合の合同類の分類を行った。古典型コンパクト対称空間 $M$ のあるコンパクトLie群 $G$ の極地として埋め込み、 $G$ の極大対蹠部分群の共役類の分類結果を利用することで、 $M$ の極大対蹠集合の合同類の代表元の行列を用いた具体的な表示を得た。それを用いて極大対蹠集合の位数の最大値および最大値を取る極大対蹠集合を決定した。 $M$ が外部型の場合には非連結な $G$ の極地として埋め込む必要があることから、非連結コンパクトLie群の極地について調べその基本的性質を明らかにした。

研究成果の学術的意義や社会的意義

対称空間は各点で点対称が定義できる空間で、様々なよい性質をもつことが知られている。コンパクト対称空間の対蹠集合はそのコンパクト対称空間の性質を反映した有限部分集合であり、極大対蹠集合の分類や位数の最大値の決定は、対蹠集合の構造や性質を解明するための手掛かりになる。極大対蹠集合の分類の研究を通じて、非連結コンパクトLie群の極地の研究やコンパクトLie群の奇数被覆度の被覆準同型写像による対蹠集合の対応の研究などへの発展があった。対蹠集合は、その有限性から、対称空間論と有限群論や組合せ論などに関連付けるものであり、研究成果により対称空間の他分野への応用が期待できることから意義があると考えられる。

研究成果の概要（英文）：We classified maximal antipodal sets of some classical compact symmetric spaces  $M$  and those of the quotient spaces of  $M$  up to congruence. Using the realization of each compact symmetric space as a polar of a certain compact Lie group  $G$ , we gave explicit descriptions of the representatives of each congruent class of the maximal antipodal sets using matrices. Furthermore, we determined the maximum of the cardinalities of maximal antipodal sets and maximal antipodal sets whose cardinalities attain the maximum. Since  $M$  is realized as a polar of a certain disconnected compact Lie group if  $M$  is an outer compact symmetric space, we studied polars of a disconnected compact Lie group and clarified their fundamental properties.

研究分野：微分幾何学

キーワード：対称空間 リー群 対蹠集合 対蹠部分群 極地

### 1. 研究開始当初の背景

対称空間は各点  $x$  において点対称とよばれる  $x$  を孤立不動点にもつ変換  $s_x$  が定義される滑らかな多様体であり、対称空間の部分集合  $S$  は、 $S$  の任意の 2 点  $x, y$  に対して  $s_x(y)=y$  が成り立つとき対蹠集合という。対蹠集合は離散で  $M$  がコンパクト連結のとき有限集合である。Chen-Nagano は  $M$  の対蹠集合の位数の上限 (実際には最大値) を 2-number と定義し、多くのコンパクト対称空間に対して 2-number を決定した。いろいろな先行研究から対蹠集合そのものの構造も興味深い研究対象であると考えら、田崎博之と共同でコンパクト対称空間の対蹠集合の研究に取り組み、対称  $R$  空間というコンパクト型エルミート対称空間を含むようなコンパクト対称空間のクラスでは、極大対蹠集合は合同を除いて一意であることがわかった。この性質は一般のコンパクト対称空間では成立するとは限らないため、田崎と共同でコンパクト対称空間の極大対蹠集合の分類に取り組み、古典型コンパクト Lie 群およびその商群の極大対蹠部分群の分類を行った。その結果、多くの場合に極大対蹠部分群の共役類の一意性は成立しないことがわかった。コンパクト Lie 群ではないコンパクト対称空間の極大対蹠集合の分類が次の課題であり、方針としては、コンパクト連結対称空間  $M$  をコンパクト Lie 群  $G$  に極地として埋め込み、 $G$  の極大対蹠部分群の分類結果を利用して  $M$  の極大対蹠集合を分類するというを考えていた。

### 2. 研究の目的

本研究課題の目的は、コンパクト対称空間の極大対蹠集合の分類を完成させ、分類結果を分析して極大対蹠集合の構造や性質を明らかにすることである。方針としては、すでに得られている古典型コンパクト Lie 群  $G$  の商群の極大対蹠部分群の分類結果を利用する。古典型コンパクト対称空間  $M$  またはその商空間  $M$  があるコンパクト Lie 群  $G$  の極地 (単位元における点対称の不動点集合の連結成分) として埋め込まれている場合には、 $M$  の極大対蹠集合の合同類の代表元として、 $G$  の極大対蹠部分群の共役類の代表元と  $M$  との共通部分を取ることができる。 $G$  の極大対蹠部分群の共役類の代表元は行列を用いて具体的に表示されているので、 $M$  の極大対蹠集合の合同類の代表元についても具体的表示が得られる。これにより極大対蹠集合の位数が求まり、極大対蹠集合の位数の最大値および最大値を取る極大対蹠集合を決定することができる。これを古典型コンパクト対称空間  $M$  に対して実行する。 $M$  が外部型、つまり、 $M$  に対応する対称対  $(G, K)$  を定める  $G$  の対合的自己同型写像  $\theta$  が外部自己同型写像のときには、 $M$  を連結コンパクト Lie 群  $G$  の極地として埋め込むことはできない。この場合には、 $G$  と、 $\theta$  が生成する  $G$  の自己同型群の部分群の半直積 (これは 2 つの連結成分からなるコンパクト Lie 群) の極地として埋め込むので、これを利用する。得られた分類結果から極大対蹠集合の構造や性質、あるいは周辺分野との関連など新たな知見を得る。

### 3. 研究の方法

古典型コンパクト対称空間  $M$  またはその商空間  $M$  があるコンパクト Lie 群  $G$  の極地 (単位元における点対称の不動点集合の連結成分) として埋め込まれているとする。 $M$  の極大対蹠集合  $A$  に単位元を加えたものは  $G$  の対蹠集合であり、それを含む  $G$  の極大対蹠部分群  $B$  が存在して  $A=B$   $M$  が成り立つ。 $G$  の極大対蹠部分群  $B, B'$  が共役ならば  $B \cap M, B' \cap M$  は  $M$  において合同であるので、これにより  $M$  の極大対蹠集合の合同類の代表元のすべての候補が得られる。このようにして得られた  $M$  の極大対蹠集合のうちで位数が最大となるものを決定する。つまり、これは大対蹠集合と 2-number を決定することであり、Chen-Nagano の結果の別証明にもなる。古典型コンパクト対称空間  $M$  が内部型、つまり、 $M$  に対応する対称対  $(G, K)$  を定める  $G$  の対合的自己同型写像  $\theta$  が内部自己同型写像のときには、 $M$  を  $G$  の極地として埋め込むことができるので、連結コンパクト Lie 群  $G$  の極大対蹠部分群の共役類の分類結果から、 $M$  の極大対蹠集合の合同類を決定できる。 $M$  が外部型の場合には、 $G$  と、 $\theta$  が生成する  $G$  の自己同型群の部分群の半直積を  $G'$  とすると、 $M$  は  $G'$  の極地として埋め込むことができるので、非連結コンパクト Lie 群  $G'$  の極大対蹠部分群の共役類を分類し、それを使って  $M$  の極大対蹠集合の合同類を決定する。

### 4. 研究成果

- (1) 古典型コンパクト対称空間の極大対蹠集合の分類と例外型コンパクト対称空間  $G_2/SO(4)$  の極大対蹠集合について研究を行った。田崎博之氏、保倉理美氏と共同で例外型コンパクト Lie 群  $G_2$  および例外型コンパクト対称空間  $G_2/SO(4)$  の極大対蹠集合の分類を得ていたが、 $G_2$  と Cayley 代数の自己同型群との同一視のもとで、 $G_2/SO(4)$  を結合的 Grassmann 多様体と見なすことにより、 $G_2/SO(4)$  の極大対蹠集合と八元数の代数構造との間に密接な関係があることを明らかにした。これらの結果は Proceedings of the American Mathematical Society に掲載された。
- (2) 田崎博之氏と共同で進めていた古典型コンパクト対称空間の極大対蹠集合の分類について

は、Grassmann 多様体、 $Sp(n)/U(n)$ 、 $SO(2n)/U(n)$  およびこれらの商空間の極大対蹠集合の分類が完了し、得られた結果は DIFFERENTIAL GEOMETRY AND ITS APPLICATIONS に掲載された。

(3) 外部型の古典型コンパクト対称空間の極大対蹠集合の分類を我々の手法で行うためには、連結ではないコンパクト Lie 群に極地として埋め込むことが必要になるが、連結ではないコンパクト Lie 群の極地についての研究はほとんど知られていないため、田崎博之氏と共同で連結とは限らないコンパクト Lie 群  $G$  の極地と子午空間に関する研究を行い、 $G$  の極地を考えることは、 $G$  と、 $G$  の対合的自己同型  $\sigma$  が生成する群との半直積の極地を考えることに帰着されることを示し、半直積の極地の具体的表示を与えた。単位連結成分に含まれる極地は  $G$  の極地と同一視でき、一方、 $\sigma$  を単位元を含まない連結成分の元と見なすと、 $\sigma$  を含む極地は、 $\sigma$  による捩れた共役作用の軌道と同一視できることがわかった。これより、 $F(\sigma, G)$  を  $G$  の不動点全体からなる  $G$  の部分群とすると、 $\sigma$  を含む極地は、コンパクト対称空間  $G/F(\sigma, G)$  と同一視できる。いくつかの具体的な  $G$  と  $\sigma$  について、それらから定まる半直積の極地を決定した。この結果は Contemporary Mathematics に掲載された。

(4) 外部型の古典型コンパクト対称空間  $U(n)/O(n)$ 、 $U(2n)/Sp(n)$ 、 $SU(n)/SO(n)$ 、 $SU(2n)/Sp(n)$  の非連結コンパクト Lie 群の極地としての実現を利用して、これらの対称空間およびその商空間の極大対蹠集合の合同類の分類を行い、極大対蹠集合の位数を求め、その最大値の決定と、最大値をとる極大対蹠集合 (大対蹠集合) の決定を行った。これらの対称空間  $M$  の対称対  $(G, K)$  を定める連結コンパクト Lie 群  $G$  の対合的自己同型写像  $\sigma$  に対して、 $G$  と、 $\sigma$  が生成する  $G$  の自己同型群の部分群  $\langle \sigma \rangle$  との半直積 (これは非連結コンパクト Lie 群) の極地として  $M$  を実現することで、今までの分類手法を用いることが可能になった。 $M$  の極大対蹠集合を分類するのに必要となるため、 $G$  と  $\langle \sigma \rangle$  との半直積であるコンパクト Lie 群およびその商群の極大対蹠部分群の共役類の分類についても行った。これらの結果を論文としてまとめて学術雑誌に投稿予定である。

(5) 連結とは限らないコンパクト Lie 群の間の被覆準同型写像の被覆次数が奇数の場合に、極大対蹠部分群の共役類が被覆準同型写像を通じてある意味不変であることを証明した。この結果は 2024 年に International Electronic Journal of Geometry に掲載された。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計11件（うち査読付論文 6件 / うち国際共著 2件 / うちオープンアクセス 3件）

1. 著者名 Makiko Sumi Tanaka	4. 巻 24
2. 論文標題 Antipodal sets and polars of symmetric spaces	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Proceedings of the 24th International Workshop on Differential Geometry of Hermitian Symmetric Spaces & Ricci Flow	6. 最初と最後の頁 29-43
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 田中 真紀子	4. 巻 2210
2. 論文標題 コンパクト対称空間の極大対蹠集合	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 94-103
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Makiko Sumi Tanaka, Hiroyuki Tasaki and Osami Yasukura	4. 巻 150
2. 論文標題 Maximal antipodal sets related to $G_2$	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 PROCEEDINGS OF THE AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY	6. 最初と最後の頁 4533 - 4542
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1090/proc/15989	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Makiko Sumi Tanaka and Hiroyuki Tasaki	4. 巻 80
2. 論文標題 Addendum to: Maximal antipodal sets of compact classical symmetric spaces and their cardinalities I	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Differential Geometry and its Applications	6. 最初と最後の頁 101815
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.difgeo.2021.101815	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Makiko Sumi Tanaka and Hiroyuki Tasaki	4. 巻 777
2. 論文標題 Polars of disconnected compact Lie groups	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Contemporary Mathematics	6. 最初と最後の頁 211-225
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/conm/777/15632	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Makiko Sumi Tanaka	4. 巻 4
2. 論文標題 Polars of disconnected compact Lie groups	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 OCAMI Reports	6. 最初と最後の頁 141-153
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.24544/ocu.20210605-004	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Makiko Sumi Tanaka	4. 巻 2
2. 論文標題 Antipodal sets of compact symmetric spaces and polars of compact Lie groups	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 OCAMI Reports	6. 最初と最後の頁 157-173
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.24544/ocu.20210605-002	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Makiko Sumi Tanaka and Hiroyuki Tasaki	4. 巻 73
2. 論文標題 Maximal antipodal sets of compact classical symmetric spaces and their cardinalities I	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Differential Geometry and its Applications	6. 最初と最後の頁 101682
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.difgeo.2020.101682	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Jost Eschenburg and Makiko Sumi Tanaka	4. 巻 57
2. 論文標題 Extrinsic symmetric subspaces	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Osaka Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 655-661
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Makiko Sumi Tanaka, Hiroyuki Tasaki and Osami Yasukura	4. 巻 22
2. 論文標題 Maximal antipodal sets of $G_2$ and $G_2/SO(4)$ and related geometry	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Proceedings of the 22nd International Workshop on Differential Geometry of Submanifolds in Symmetric Spaces	6. 最初と最後の頁 153-159
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Jost-Hinrich Eschenburg, Peter Quast and Makiko Sumi Tanaka	4. 巻 23
2. 論文標題 Isometries of extrinsic symmetric spaces	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Asian Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 439-454
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4310/AJM.2019.v23.n3.a4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計22件 (うち招待講演 17件 / うち国際学会 9件)

1. 発表者名 田中真紀子、田崎博之
2. 発表標題 古典型コンパクト対称空間の極大対蹠集合 III
3. 学会等名 日本数学会2023年度秋季総合分科会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Makiko Sumi Tanaka
2. 発表標題 Antipodal sets of compact symmetric spaces
3. 学会等名 2023 OCAMI-RIRCM International Workshop on Geometry and Symmetric Spaces (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Makiko Sumi Tanaka
2. 発表標題 Antipodal sets of compact symmetric spaces
3. 学会等名 Representations of Symmetric Spaces (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 田中 真紀子
2. 発表標題 古典型コンパクト対称空間の極大対蹠集合とその分類
3. 学会等名 部分多様体幾何とリー群作用2023 (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 田崎 博之
2. 発表標題 非連結コンパクトLie 群の極地とコンパクト対称空間の極大対蹠集合
3. 学会等名 部分多様体幾何とリー群作用2021 (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Makiko Sumi Tanaka
2. 発表標題 Classification of maximal antipodal sets of compact symmetric spaces
3. 学会等名 The 24th International Workshop on Differential Geometry of Hermitian Symmetric Spaces and Ricci Flow (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 田崎 博之
2. 発表標題 Hermann作用
3. 学会等名 第3回水戸幾何小研究集会 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Makiko Sumi Tanaka
2. 発表標題 Antipodal sets of compact symmetric spaces
3. 学会等名 2023 OCAMI-RIRCM International Workshop on Geometry and Symmetric Spaces (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 田中 真紀子
2. 発表標題 コンパクト対称空間の極大対蹠集合
3. 学会等名 部分多様体論と関連する幾何構造研究の深化と融合 (招待講演)
4. 発表年 2022年



1. 発表者名 田中 真紀子、田崎 博之
2. 発表標題 古典型コンパクト対称空間の極大対蹠集合 II
3. 学会等名 日本数学会2021年度秋季総合分科会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 田中 真紀子
2. 発表標題 Maximal tori of extrinsic symmetric spaces
3. 学会等名 対称空間と群作用の幾何学（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 田中 真紀子
2. 発表標題 非連結コンパクトLie群の極地
3. 学会等名 カントルと対称空間（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 田中真紀子
2. 発表標題 非連結コンパクトLie群の極地
3. 学会等名 筑波大学微分幾何学セミナー（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Makiko Sumi Tanaka
2. 発表標題 Antipodal sets of compact symmetric spaces and polars of compact Lie groups
3. 学会等名 Submanifolds of Symmetric Spaces and Their Time Evolutions (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 田中 真紀子、田崎 博之
2. 発表標題 非連結コンパクトLie群の極地
3. 学会等名 日本数学会2021年度年会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 田中 真紀子
2. 発表標題 グラスマン多様体とその商空間の極大対蹠集合
3. 学会等名 第2回水戸幾何小研究集会 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Makiko Sumi Tanaka, Hiroyuki Tasaki and Osami Yasukura
2. 発表標題 Maximal antipodal sets of $G_2$ and $G_2/SO(4)$ and related geometry
3. 学会等名 The 22nd International Workshop on Differential Geometry of Submanifolds in Symmetric Spaces (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Makiko Sumi Tanaka
2. 発表標題 Maximal antipodal sets of classical compact symmetric spaces
3. 学会等名 Differential Geometry and its Applications (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 田中 真紀子、田崎 博之、保倉 理美
2. 発表標題 例外型コンパクト対称空間 $G_2/SO(4)$ の幾何
3. 学会等名 日本数学会2019年度秋季総合分科会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Makiko Sumi Tanaka
2. 発表標題 Maximal antipodal sets of classical symmetric spaces
3. 学会等名 The 2nd Taiwan-Japan Joint Conference on Differential Geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 田中 真紀子
2. 発表標題 古典型コンパクト対称空間の極大対蹠集合
3. 学会等名 筑波大学微分幾何セミナー (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Makiko Sumi Tanaka, Hiroyuki Tasaki, Osami Yasukura
2. 発表標題 Maximal antipodal sets related to $G_2$
3. 学会等名 Joint Mathematics Meetings 2020 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

<p>研究者情報データベースRIDAI  <a href="https://www.tus.ac.jp/ridai/doc/ji/RIJIA01Detail.php?act=nam&amp;kin=ken&amp;diu=2cad">https://www.tus.ac.jp/ridai/doc/ji/RIJIA01Detail.php?act=nam&amp;kin=ken&amp;diu=2cad</a></p>
--

6. 研究組織			
	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

国際研究集会 部分多様体幾何とリー群作用2021	開催年 2022年～2022年
-----------------------------	--------------------

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------