様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　６ 年　６ 月 １３ 日現在

機関番号：３２６８９
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2019～2023
課題番号：１９Ｋ０３４８０

研究課題名（和文）スピン幾何学の新展開

研究課題名（英文）New developments in spin geometry

研究代表者
本間　泰史（HOMMA，Yasushi）

早稲田大学・理工学術院・教授

研究者番号：５０３２９１０８

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,400,000円

研究成果の概要（和文）：(1) 高階スピンのスピン幾何学の開拓を試みた．第一の成果は，スピン3/2のラリタ-シュインガー作用素に対する固有値計算方法を対称空間上で与え，球面・複素射影空間・四元数射影空間上で計算した．第二の成果は，高階スピンのスピノール場や対称テンソル場の振る舞いを，定曲率空間上で明らかにした．応用として，球面上で高階スピンのディラック作用素の固有値をすべてもとめた．
(2) 球面調和解析におけるPizzetti公式を，向き付き実グラスマン多様体Gr(2,n)上へ一般化した．その過程で，Gr(2,n)上の不変微分作用素らがヒッグス代数と呼ばれるsl(2,R)の変形代数を成すことを解明した．

研究成果の学術的意義や社会的意義
(1) 幾何学ではラリタ-シュインガー場の研究が行われ，物理学では量子重力や高次スピンのゲージ理論の研究が行われ，最近は高階スピンのスピノール場の研究が活発である．本課題の成果は，定曲率空間や対称空間という条件のもと，高階スピンのスピノール解析を行ったものであり，スピンが異なる場のツイスター作用素を通した関係が把握できる幾何学・物理学分野にインパクトある成果である．実際，ド-ジッター空間上の調和解析という物理学分野へ応用されている．
(2) 実グラスマン多様体上の不変微分作用素がヒッグス代数を成すことを発見したことは意義があり，Gr(k,n)へ一般化した場合の代数の解明が今後の課題である．

研究成果の概要（英文）：(1) We attempted to pioneer spin geometry with higher spin. The first result was to give a method for calculating the eigenvalues for the Rarita-Schwinger operator on spin 3/2 spinors on symmetric spaces. And we got all the eigenvalues on the sphere, the complex projective space, and the quaternion projective space. The second result was to clarify the behavior of spinor fields with higher spin and symmetric tensor fields on spaces of constant curvature. As an application, we got all the eigenvalues of the higher spin Dirac operator on the sphere. These results were obtained in collaboration with T. Tomihisa.
(2) We generalized the Pizzetti formula in spherical harmonic analysis to the real Grassmannian manifold of oriented 2 plances, Gr(2,n). In the process, we clarified that invariant differential operators on Gr(2,n) consist of a deformation algebra of sl(2,R) called the Higgs algebra. This was done in collaboration with D. Eelbode.

研究分野：微分幾何学

キーワード：スピン幾何学　クリフォード解析　スピノール場　ラリタ-シュインガー場　高階スピン　実グラスマン多様体　ヒッグス代数

１．研究開始当初の背景

スピン幾何学とは，スピン多様体上でスピノール場及びディラック作用素を用いた幾何学・解析学である．このディラック作用素は Atiyah-Singer 指数定理において本質的な役割を果たし，特殊なスピノール場である平行スピノール場やキリングスピノール場をもつ多様体には，カラビ-ヤウ多様体・G2 多様体・佐々木アインシュタイン多様体・Nearly ケーラー多様体など微分幾何学で重要な対象が現れるため，スピン幾何学は現代幾何学には欠かせない分野である．

研究代表者は Semmelmann 氏と共同で，スピン 3/2 をもつ特殊スピノール場であるラリタ-シュインガー場と様々な幾何構造の関連性を調べた. 既存のスピン幾何学ではスピン 1/2 のスピノール場を扱うが，それをスピン 3/2 へ上げた幾何学であり，数学だけでなく物理分野でもインパクトがある結果であった. 研究代表者は，そのような高階スピンの幾何学の研究を発展させることは喫緊の課題であろうと考えていた.

クリフォード解析学とは，球面調和解析や正則関数論をディラック作用素による一般化として発展してきた．近年は，高階スピンのディラック作用素の研究，球面をグラスマン多様体などの等質空間に置き替えた場合の研究など，クリフォード解析学の新しい方向性の開拓が行われてきた．しかし，微分幾何学的視点からの研究は乏しく，それらの結果が曲がった空間でどうなるかは興味深い. 研究代表者は，スピン幾何学を専門とするがクリフォード解析学の研究者との交流も深いため，スピン幾何学とクリフォード解析学を融合することを試みていた．また，本研究課題の開始前から，クリフォード解析学の専門家である Eelbode 氏とグラスマン多様体上でのクリフォード解析学について共同研究を実施していた.

２．研究の目的

(1) 研究目的を述べるために, 高階スピンのディラック作用素を定義しておく. $S_o^k(TM)$を接束 TM の k 次対称テンソル積（トレース零）の既約ベクトル束とする．k=1 の場合は TM に等しい．ディラック作用素をこのベクトル束$S_o^k(TM)$でツイストした微分作用素を既約分解することで，スピン k+1/2 のスピノール場に作用する 1 階楕円型微分作用素が定義できる．それをD_kと表し，<u>高階スピンのディラック作用素</u>と呼ぶ．k=0 の場合は通常のディラック作用素であり，k=1 の場合はラリタ-シュインガー作用素（RS 作用素）と呼ばれる．また，ツイストしたディラック作用素には，スピン k+1/2 からスピン(k±1)+1/2 へ移す 1 階微分作用素も現れるが，それらは<u>高階スピンのペンローズ作用素</u>と呼ばれ$T_k^{\pm}$で表される．T_0^{+}が通常のペンローズ作用素である．また，$D_1(\varphi)=0, T_1^{-}(\varphi)=0$となるスピン 3/2 のスピノール場$\varphi$は，物理学ではグラビティーノを記述するものとして重要であり, それが研究の背景で述べたラリタ-シュインガー場である.

本研究課題の主要目的は, <u>スピン幾何学の様々な話題をスピン 3/2 または高階スピンへと拡張し，新しい幾何学を創造・開拓すること</u>である．具体的には,

(a)RS 作用素に対する固有値値評価の構築や等号が成立する多様体の分類.
(b)キリングスピノール場を持つ多様体の RS 場.
(c)スピン 3/2 の平行スピノール場による超ケーラー構造の構成.
(d)アインシュタイン条件を課さない場合のワイゼンベック公式の開発.
(e)アインシュタイン計量の変形理論への応用.
(f)対称空間上の RS 作用素及びスピン k/2 への拡張.

などが挙げられ，それらの理学や解析学の応用を模索することも目的である.

(2) もう一つの目的は，Eelbode 氏と行ってきた共同研究である<u>グラスマン多様体上のクリフォード解析学</u>を完成させることである．これまでのクリフォード解析学は主にユークリッド空間や球面上で行われてきたが，それを向き付き 2 平面がなすグラスマン多様体 Gr(2,n)へ拡張する．グラスマン多様体 Gr(k,n)上でも自然にスピノール束が定義され，スピノール場はスピノール値多項式として言い換えることができる（このスピノール束は，スピン幾何学でのスピノール束とは異なる)．また，wedge ディラック作用素という 2 階微分作用素が定義され. その 2 乗はケーリー-ラプラス作用素という 4 階微分作用素となる. これらを用いた調和解析を目的とする. 具体的には

(a)不変微分作用素が成す代数の代数構造を明らかにし，Howe 双対性を得る.
(b)Gr(k,n)への一般化.
(c)得られた結果の幾何学的解釈.

などが挙げられる.

３．研究の方法

(1) スピン 3/2 のスピン幾何学について，Semmelmann 氏と共同研究を行う予定であった．しかしながら，研究期間中の 2020 年度～2022 年度はコロナの影響があり，本研究課題に関する共同研究は最終年度にのみ実施した．スピン c 多様体上でのスピン 3/のスピノール場の研究を行ったが論文となるほどの良い成果は得られなかった. 一方, 研究期間中に博士課程学生であった富久氏との共同研究を実施し．<u>対称空間上のラリタ-シュインガー作用素のスペクトルの研究</u>及び

定曲率空間上の高階スピンディラック作用素の調和解析について成果を得ることができた．
(2) グラスマン多様体上の調和解析については，Eelbode 氏との国際共同研究を行い，研究初年度において良い研究成果を得ることができた．それ以降はコロナの影響のため一時停滞してしまったが，得られた研究成果の応用や一般化についての議論を継続して行っている．
上記の(1),(2)で得られた研究成果については，国際学術雑誌にて発表し，学会・シンポジウム・セミナーなどにおいて多数の講演を行った．また，他分野への応用を探るべく，古谷氏や多羅間氏らと共同で，本研究課題に関連した国際研究集会を 2022 年度・2023 年度に開催した．

４．研究成果
(1) 高階スピンのスピノール場に関する研究成果
(1-a) 対称空間上のラリタ-シュインガー作用素の固有値計算について
ディラック作用素は 2 乗するとラプラス作用素であるため，対称空間上のディラック作用素の固有値を計算は分規則とカシミール作用素の固有値計算へと帰着する．この固有値計算は，様々な対称空間で実行されたが，スピン 3/2 の場合には RS 作用素を 2 乗してもラプラス作用素とならないことから，そのままでは適用できない．そのため Branson による球面でしか適用できない複雑な方法しか知られていなかった．そこで，ペンローズ作用素を用いてスピン 3/2 のスピノール場を ker (T_1^-)と Image(T_0^+)の 2 成分に分解することで，この困難を解消した．実際，各成分上で RS 作用素の 2 乗はカシミール作用素の定数倍に一致する．このように，対称空間においてラリタ-シュインガー作用素の固有値計算の手法を確立した．また，具体的な計算として，球面，複素射影空間，四元数射影空間の場合に実行した．特に，球面の場合では，既存の方法よりも計算はかなり簡略化される．これらの研究成果は国際学術雑誌に掲載された．
(1-b) 定曲率空間上の高階スピンディラック作用素を用いた調和解析について
上の(1-a)で述べた手法は，定曲率空間上の高階スピンのディラック作用素D_kについても適用できる．ここで，k≧2 の場合に適用できる理由は，定曲率空間を仮定することで作用素らの可換性が得られたためである．この仮定を外すことは今後の課題となっている．さて，高階スピンのスピノール場の空間も，各階数でのペンローズ作用素を用いれば分解することがわかる．スピンが高いほどスピノール場の空間は多くの成分に分解され複雑化するが，定曲率空間であることを仮定すると，分解された各成分はスピンが低いものからペンローズ作用素を通して現れることがわかる．そして，作用素の可換性から$(D_k)^2$は各成分上ではラプラス作用素の定数倍となり，固有値計算が可能となる．また，各成分の情報を合わせることで，ラプラス作用素の k 乗の因子にD_kが現れることが示せる．つまり，ラプラス作用素の k 乗に対する因数分解公式が得られた．スピン 1/2 のディラック作用素の 2 乗がラプラス作用素となる事実の高階スピン版である．具体例として，球面上の高階スピンのスピノール調和解析を実施し，$(D_k)^2$の固有値をすべて計算した．この計算法は既存の手法とは全く異なる簡易化された方法となっている．次に，同様の手法を，接束の対称テンソル場やスピンをもつ微分形式の場合にも適用した．k 次対称テンソル場上でラプラス作用素の k 乗に対する因数分解公式を得ることに成功した（ただし，定曲率空間上である）．具体例として，ダイバージェンスなどの幾何学的１階微分作用素らの固有値を球面上で計算した．特に，球面上のキリング-テンソル場の分解という古典的結果を，表現論的視点から証明した．また，スピンをもつ微分形式上でも同様の計算を行い，応用として定曲率空間上ではあるが，ホッジ-ドラーム分解定理の類似を得た．この研究成果は，国際学術雑誌に掲載された．
なお，本研究課題の目的の一つであった，Nearly ケーラー多様体・Nearly 平行 G2 多様体上のラリタ-シュインガー場及び構造変形理論について，博士課程学生であった大野氏と富久氏が研究を実施し，その解明に成功した．
(2) 実グラスマン多様体上での調和解析に関する研究成果
球面上の関数は球面調和関数とよばれ，調和多項式の球面への制限として実現される．これらの空間に作用するラプラス作用素らが成す SO(n)不変微分作用素は sl(2,R)というリー代数構造をもつ．これは Howe 双対性と呼ばれる双対性の具体的かつ簡単な例である．また，応用として Pizzetti 公式と呼ばれる積分公式が知られている．これらことを n 次元ベクトル空間内の向き付き 2 平面が成す実グラスマン多様体 Gr(2,n)で実施した．まず，行列上の調和多項式空間をスティーフェル多様体へ制限し，さらに SO(2)不変性を課すことで，Gr(2,n)上の関数を実現し，その既約分解をケーリー-ラプラス作用素などの不変微分作用素を用いて行った．そして，その空間上での不変微分作用素の振る舞いを調べることで，作用素らが Higgs 代数と呼ばれる sl(2,R)の 2 次変形代数を成すことを示した．これはリー代数ではないが，sl(2,R)の q 変形を 2 次部分まで考えたものとして知られており，この代数構造を見出したことはインパクトある成果と言える．また，応用として Pizzetti 公式を Gr(2,n)上へ一般化した．Gr(k,n)の調和解析はすでに多くの研究があるが，この研究成果は新しい視点を与えていると考える．以上の研究成果は，国際学術雑誌に掲載された．

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計3件（うち査読付論文　3件／うち国際共著　1件／うちオープンアクセス　1件）

１．著者名 Homma Yasushi、Tomihisa Takuma	４．巻 60
２．論文標題 The spinor and tensor fields with higher spin on spaces of constant curvature	５．発行年 2021年
３．雑誌名 Annals of Global Analysis and Geometry	６．最初と最後の頁 829～861
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s10455-021-09791-4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

１．著者名 Eelbode D.、Homma Y.	４．巻 58
２．論文標題 Pizzetti formula on the Grassmannian of 2-planes	５．発行年 2020年
３．雑誌名 Annals of Global Analysis and Geometry	６．最初と最後の頁 325～350
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s10455-020-09731-8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

１．著者名 Homma Y.、Tomihisa T.	４．巻 31
２．論文標題 Spectra of the Rarita-Schwinger Operator on Some Symmetric Spaces	５．発行年 2021年
３．雑誌名 Journal of Lie Theory	６．最初と最後の頁 249～264
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

〔学会発表〕　計6件（うち招待講演　3件／うち国際学会　2件）

１．発表者名 本間泰史
２．発表標題 Higgs algebra in harmonic analysis on the Grassmannian of 2-planes
３．学会等名 mini-workshop, Global analysis and geometrry（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2023年

１．発表者名
本間泰史

２．発表標題
Higgs algebra in harmonic analysis on the Grassmannian of 2-planes

３．学会等名
第68回幾何学シンポジウム（招待講演）

４．発表年
2021年

１．発表者名
本間泰史，David Eelbode

２．発表標題
Pizzetti formula on the Grassmannian of 2-planes

３．学会等名
日本数学会 年会

４．発表年
2021年

１．発表者名
富久拓磨，本間泰史

２．発表標題
定曲率空間上のスピノール解析

３．学会等名
日本数学会 年会

４．発表年
2021年

１．発表者名
富久拓磨，本間泰史

２．発表標題
対称空間上のRarita-Schwinger作用素の固有値について

３．学会等名
日本数学会 秋季総合分科会

４．発表年
2020年

1．発表者名 Yasushi HOMMA
2．発表標題 The Rarita-Schwinger Operator and Spin Geometry
3．学会等名 The second Taiwan-Japan Joint Conference on Differential Geometry（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2019年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

6．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考
研究協力者	富久　拓磨 (Tomihisa Takuma)	早稲田大学	
研究協力者	大野　走馬 (Ohno Soma)	早稲田大学	

7．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計2件

国際研究集会	開催年
Global Analysis and Geometry 2023	2023年～2023年
mini-workshop, Global analysis and geometry	2023年～2023年

8．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
ベルギー	アントワープ大学			
ドイツ	シュトゥットガルト大学			