

令和 6 年 6 月 17 日現在

機関番号：33919

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2019～2023

課題番号：19K03482

研究課題名（和文）例外型単純Lie群G2の作用する空間の幾何構造

研究課題名（英文）Geometrical structures on manifolds which have the action of the exceptional Lie group G2

研究代表者

橋本 英哉（Hashimoto, Hideya）

名城大学・理工学部・教授

研究者番号：60218419

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,300,000円

研究成果の概要（和文）：例外型単純Lie群G2の作用する空間の幾何構造に関する研究を行った。特に6次元球面はその典型例であり、剰余空間G2/SU(3)と表示される。この表現は例外型単純Lie群G2の7次元ユークリッド空間への作用を6次元球面に制限することによって得られる。この表示を用いると6次元球面上に積分可能ではない概複素構造が構成できる。本研究ではこの種の幾何構造の変形理論の構築を試みるためのプロトタイプとして2次元球面上のS1束の変形理論について考察し、Hirzebruch surface 上の2次元トーラス束の全空間上に複素構造を導入し、その変形理論との関連を見出した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

複素多様体上の変形理論は研究されているが、6次元球面上の概複素構造の変形理論についてはほとんど研究がなされていない。その理由は6次元球面上のSU(3)束の具体的な構成が複雑であるためである。これをコサイクル条件を用いて実現することを目指しているが、ケーリー代数が結合法則を満たさないため困難が生じている。そのため、最も簡単な2次元球面上のS1束のコサイクル条件を研究することで、Hirzebruch surface 上の2次元トーラス束の全空間上に複素構造を導入し、その変形理論との関連を記述した。さらに、その6次元球面に対応する理論構築の道筋を見出したことが本研究の学術的意義である。

研究成果の概要（英文）：Let G2 be the 14dimensional exceptional Lie group. We study geometrical structures of manifolds which are obtained as the orbit under the action of G2. For example the 6-dimensional sphere is represented by the homogeneous space G2/SU(3). Then we can construct the non-integrable almost complex structure on the 6-dimensional sphere. We want to know the deformation theory of almost complex structures on a 6-dimensional sphere. To do this, we consider S1 fibre bundles over a 2-dimensional sphere, as a prototype. We obtain some relationship of the deformation of complex structures on the total space of 2-dimensional torus bundle over the Hirzebruch surfaces.

研究分野：幾何学

キーワード：ケーリー代数 概複素構造 6次元球面 コサイクル条件 Hirzebruch 曲面 Fibre bundle Calabi-Eckmann 多様体 例外型単純 Lie 群 G2

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

## 1. 研究開始当初の背景

現在まで Cayley 代数 (8 元数)  $\mathbb{O}$  内の可符号 6 次元部分多様体及び 6 次元球面の不変部分多様体のグラスマン幾何学について研究を積み重ねてきた。この幾何学の特徴は簡潔に述べれば通常のユークリッド幾何学の等長変換群 (平行移動  $R^n$  と直交群  $O(n)$  の半直積)  $R^n \rtimes O(n)$  ( $n = 7, 8$ ) をその部分群の作用に変更することである。特にこの作用する群を  $\text{Im } \mathbb{O} \rtimes G_2$  あるいは  $\mathbb{O} \rtimes \text{Spin}(7)$  に縮小することにより幾何学としての差異がどの様に現れるかを調べるのが問題である。ここに  $G_2$  は例外型単純 Lie 群 (Cayley 代数  $\mathbb{O}$  の積を保つ自己同型全体の為す群)、 $\text{Spin}(7) \subset SO(8)$  は  $SO(7)$  の普遍被覆群を表す。作用する群を縮小したのであるから作用する空間 (例えば 6 次元球面  $S^6 = G_2/SU(3)$ 、7 次元球面  $S^7 = \text{Spin}(7)/G_2$ 、Cayley 代数  $\mathbb{O} = \{\mathbb{O} \rtimes \text{Spin}(7)\}/\text{Spin}(7)$  等) の部分多様体の合同類は、リーマン幾何学の範疇では捉えられない不変量を必要とする。その不変量として概複素構造、付随する標準的な 2 次微分形式 (Kähler 2-form)、結合的 3 次微分形式 (associative 3-form)、Cayley 4 次微分形式 (Cayley 4-form) に注目する必要がある。

例外ホロノミー群、あるいは、Calibrated geometry の立場から E. Calabi, Harvey-Lawson, Bryant, Joyce らの Twistor 理論、 $G_2$ ,  $\text{Spin}(7)$  ホロノミー群を持つ多様体の構成に関する研究があり、部分多様体論の立場からは、特に 6 次元球面内の 3 次元 totally real 部分多様体に関して江尻氏 (名城大学)、間下氏 (法政大学) らの研究があった。さらに、私の研究として 6 次元球面 (Nearly Kähler 構造に関する) 内の実 2 次元概正則曲線の Bryant による Twistor 構成と Cartan の外微分形式との関連を明確にした。このことにより具体的な実 2 次元概正則曲線の Weierstrass 型の表現公式を与えた。この応用は本研究で追求すべき課題であり、四元数 Kähler 多様体  $G_2/SO(4)$  との関連から考察を行う状況となった。第一の問題点は  $G_2/SO(4)$  上の四元数 Kähler 構造の具体的な表示を与える点である。この空間の構成に関しては対称空間の理論から Adjoint 表現を用いることにより具体化できた。一方、対応する invariant 4-form の構成方法は自明ではなかった点と Calabi-Bryant の  $G_2$  moving frame field の理論に合致した表現を得るために工夫を要した。特に計量構造を具体的に記述しない方法のため、ここでは  $G_2/SU(2)_\Pi$  の 3-佐々木構造を用いる方法を取ることで直接 invariant 4-form の表現を得ることができた。現在この点を論文としてまとめる段階にある。さらに、 $S^6$  内の実 2 次元概正則曲線に対応する  $G_2/SO(4)$  内の invariant submanifolds がどのような幾何学的性質を持つかを調べることは今後の研究課題の一つとなる。

また、四元数 Kähler 多様体  $G_2/SO(4)$  上の Twistor space である  $G_2/U(2)_+$  は構造方程式を用いることにより複素多様体 (先にも述べたが Einstein Kähler 多様体である) の構造を持つことが Newlander-Nirenberg の定理を用いて直接に示すことができその複素多様体には  $G_2(\mathbb{C})$  の複素 Lie 部分群  $K$  が推移的に作用することが構造方程式から理解できている。しかしながら、 $K$  がどのような非 compact 群としての性質をもっているかは今後の課題であり、まだ未開拓の内容も含んでいる。この対応関係等々調べなければならない点は多々残っている。更に  $G_2/U(2)_+$  は complex contact structure を定める正則一次微分形式が存在する。この complex contact structure には自然な積分多様体として複素 Legendrian 部分多様体が定まる。この部分多様体の像として得られる  $G_2/SO(4)$  内の部分多様体の構造を調べることも重要な問題である。以上が現在までの研究の背景である。上記の様に 6 次元球面及びその周辺の部分多様体と関連したファイバー束に関する状況である。

## 2. 研究の目的

例外型単純 Lie 群  $G_2$  の作用する空間の幾何構造に関する研究を行っていた。特に 6 次元球面はその典型例であり、剰余 (等質) 空間  $G_2/SU(3)$  と表示される。この表現は例外型単純 Lie 群  $G_2$  の 7 次元ユークリッド空間への作用を 6 次元球面に制限することによって得られる。この表示を用いると 6 次元球面上に積分可能ではない概複素構造が構成できる。同様に 7 次元ユークリッド空間を純虚ケーリー代数と同一視することにより、結合的 3 次元部分空間全体のなすグラスマン多様体、これを結合的グラスマン多様体と呼ぶ。この時結合的グラスマン多様体は等質空間  $G_2/SO(4)$  と表示され、これを用いると  $G_2$  の作用する種々の Fibre bundle が構成できる。当初は  $G_2$  の作用する種々の Fibre bundle の新しい幾何構造を具現化することを目標としていた。この幾何構造を記述することはできたがコサイクル構成に関する部分が不足していることが本研究中に明らかになったのでこの部分を明確に捉えることを目的とした

## 3. 研究の方法

研究方法は、上記の理由から、自然にコサイクル条件の具体化についての議論が主要な課題となり、その実現方法を追求することになった。典型的な例として Hirzebruch surface の族が 1 次元複素射影空間と 2 次元複素射影空間の直積多様体内の複素部分多様体として実現できること。一方で 3 次元球面と 5 次元球面の直積 (として構成できる Calabi-Eckmann 多様体) が 1 次元複素射影空間と 2 次元複素射影空間の直積多様体上の 2 次元トーラス束になること。さらに、そのコサイクル条件の記述ができていることに注目して、Hirzebruch surface 上の 2 次元トーラス束上の複素構造の変形を記述する方法を見出した。

## 4. 研究成果

例外型単純 Lie 群  $G_2$  の作用する空間の幾何構造に関する研究を行った。特に 6 次元球面はその典型例であり、剰余空間  $G_2/SU(3)$  と表示される。この表現は例外型単純 Lie 群  $G_2$  の 7 次元ユークリッド空間への作用を 6 次元球面に制限することによって得られる。この表示を用いると 6 次元球面上に積分可能ではない概複素構造が構成できる。本研究ではこの種の幾何構造の変形理論の構築を試みるためのプロトタイプとして 2 次元球面上の  $S^1$  束の変形理論について考察し、Hirzebruch surface 上の 2 次元トーラス束の全空間上に複素構造を導入し、その変形理論との関連を得た。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件／うち国際共著 0件／うちオープンアクセス 0件）

|   |                       |
|---|-----------------------|
| 1. 著者名<br>HASHIMOTO Hideya  | 4. 巻<br>1             |
| 2. 論文標題<br>ON THE RELATIONSHIPS BETWEEN HOPF FIBRATIONS AND CARTAN HYPERSURFACES IN SPHERES | 5. 発行年<br>2022年       |
| 3. 雑誌名<br>New Horizons in Differential geometry and its related fields                      | 6. 最初と最後の頁<br>139-149 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子）<br>10.1142/9789811248108_0009                                       | 査読の有無<br>有            |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難  | 国際共著<br>-             |

|   |                       |
|---|-----------------------|
| 1. 著者名<br>Hideya Hashimoto, Misa Ohashi and Kazuhiro Suzuki   | 4. 巻<br>-             |
| 2. 論文標題<br>Non-flat totally geodesic surfaces of $SU(4)/SO(4)$ and fibre bundle structures related to $SU(4)$ | 5. 発行年<br>2020年       |
| 3. 雑誌名<br>Recent topics in differential geometry and its related fields                                       | 6. 最初と最後の頁<br>149-161 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子）<br>なし   | 査読の有無<br>有            |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難  | 国際共著<br>-             |

|   |                     |
|---|---------------------|
| 1. 著者名<br>Hideya Hashimoto and Misa Ohashi  | 4. 巻<br>82          |
| 2. 論文標題<br>On the automorphism groups of isoparametric hypersurfaces of $S^7$           | 5. 発行年<br>2020年     |
| 3. 雑誌名<br>Advanced studies in pure mathematics, Differential Geometry and Tanaka Theory | 6. 最初と最後の頁<br>75-85 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子）<br>なし   | 査読の有無<br>有          |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難  | 国際共著<br>-           |

〔学会発表〕 計4件（うち招待講演 4件／うち国際学会 1件）

|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>Hideya Hashimoto  |
| 2. 発表標題<br>Geometrical structures on homogeneous spaces related to $G_2$         |
| 3. 学会等名<br>The Conference Differential Geometry and its Applications（招待講演）（国際学会） |
| 4. 発表年<br>2019年  |

|                                     |
|-------------------------------------|
| 1. 発表者名<br>橋本 英哉                    |
| 2. 発表標題<br>G2に関連した等質空間の幾何構造の実現とその応用 |
| 3. 学会等名<br>多様体上の微分方程式 (招待講演)        |
| 4. 発表年<br>2019年                     |

|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>橋本 英哉                               |
| 2. 発表標題<br>G2のグラスマン幾何                          |
| 3. 学会等名<br>遺暦記念研究集会「Hideya60」 (名古屋工業大学) (招待講演) |
| 4. 発表年<br>2019年                                |

|                                  |
|----------------------------------|
| 1. 発表者名<br>橋本 英哉                 |
| 2. 発表標題<br>GL+(2,R)上の左不変計量       |
| 3. 学会等名<br>淡路島幾何学研究集会2020 (招待講演) |
| 4. 発表年<br>2020年                  |

〔図書〕 計2件

|   |                 |
|---|-----------------|
| 1. 著者名<br>Toshiaki ADACHI and Hideya HASHIMOTO                        | 4. 発行年<br>2022年 |
| 2. 出版社<br>World Scientific  | 5. 総ページ数<br>248 |
| 3. 書名<br>New Horizons in Differential geometry and its related fields |                 |

|  |                 |
|--|-----------------|
| 1. 著者名<br>Toshiaki ADACHI, Hideya HASHIMOTO                            | 4. 発行年<br>2020年 |
| 2. 出版社<br>World Scientific   | 5. 総ページ数<br>209 |
| 3. 書名<br>Recent Topics in Differential Geometry and its Related Fields |                 |

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

|       | 氏名<br>(ローマ字氏名)<br>(研究者番号)  | 所属研究機関・部局・職<br>(機関番号) | 備考 |
|-------|----------------------------|-----------------------|----|
| 研究協力者 | 大橋 美佐<br><br>(Ohashi Misa) |                       |    |

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

|         |         |
|---------|---------|
| 共同研究相手国 | 相手方研究機関 |
|---------|---------|