

令和 5 年 6 月 15 日現在

機関番号：34419

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2019～2022

課題番号：19K03483

研究課題名(和文) 絡み目のバンド変形とデー手術に関する研究

研究課題名(英文) Studies on band surgery and Dehn surgery on links

研究代表者

鄭 仁大 (Jong, In Dae)

近畿大学・理工学部・准教授

研究者番号：30587788

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 900,000円

研究成果の概要(和文)：1) 非自明な2橋結び目は純コスメティック手術対を許容しないことを証明しました。この結果を記した論文は市原一裕氏，斎藤敏夫氏，Thomas Mattman 氏との共著として学術誌に掲載されました。2) 交代結び目，およびモンテシノス結び目が純コスメティック手術をもつための障碍となる不変量の計算を行い，これらの結び目に対する純コスメティック手術予想の部分的な解答を得ました。3) 例外的デー手術を許容する双曲的2橋絡み目をすべて決定しました。この結果を記した論文は市原一裕氏，正井秀俊氏との共著論文として執筆し，現在投稿中です。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究で得られた成果のうち，学術雑誌に掲載された論文「Two-bridge knots admit no purely cosmetic surgeries」は，今後のデー手術研究，特に矯飾的デー手術研究における重要なマイルストーンとなります。さまざまな不変量の計算を駆使して全ての2橋結び目に対して未解決問題が解決できたことは，結果自体が重要であることに加え，研究手法として1つの道筋を構成したことに意義があります。

研究成果の概要(英文)：1) We prove that any non-trivial two-bridge knot admit no purely cosmetic surgery pairs. The paper containing the result had published in a refereed journal as a collaboration paper with Kazuhiro Ichihara, Toshio Saito, and Thomas Mattman. 2) We calculate several invariants to show alternating knots and Montesinos knots admit no purely cosmetic surgeries. We obtain a partial result for this study. 3) We give a complete list of hyperbolic two-bridge links which can admit complete exceptional surgeries. The paper containing the result had submitted to a refereed journal as a collaboration paper with Kazuhiro Ichihara and Hidetoshi Masai.

研究分野：結び目理論，低次元トポロジー

キーワード：デー手術 矯飾的デー手術 例外的デー手術 結び目 絡み目 局所変形操作

1. 研究開始当初の背景

3次元球面内の結び目に沿ったデーネ手術については、これまで多くの研究がなされており、それにともない多くの結果が知られています。特に、ゴードン・ルーキーによる結び目補空間予想の肯定的解決や、サーストーンによる双曲デーネ手術定理を礎にした例外的デーネ手術に関する様々な深い結果が知られています。研究代表者も例外的デーネ手術に関する研究においていくつかの結果を得ています。

一方で、3次元球面以外の3次元多様体内の結び目に沿ったデーネ手術の研究は、結び目に制限しないことからの難しさから、結び目のデーネ手術の研究に比べると多くの結果が得られているとは言えない現状です。3次元球面内の結び目に限定せずに、絡み目のデーネ手術の研究を行うことは、3次元多様体内の結び目に沿ったデーネ手術を研究することにも直結し、さらにこの研究は3次元多様体の間の関係を調べる研究であると位置づけられます。そのような考えのもとで、この分野における今日の基本的な問題である結び目の矯飾的手術予想や、絡み目に沿ったデーネ手術の研究を行うことが、今後の低次元トポロジーの進展において重要であるということが本研究開始時の背景となります。

2. 研究の目的

デーネ手術、およびバンド変形に関する未解決問題を解決すること、およびそこから派生する低次元トポロジーの問題について研究を進めることが本研究の目的でした。具体的には、次のとおりでした：

- (1) 3次元球面内の非自明な結び目は純矯飾的デーネ手術を許容しない(3次元球面内の結び目の矯飾的手術予想)ことの証明に向けてのマイルストーンとして、2橋結び目、およびその拡張である交代結び目、モンテシノス結び目に対して、純矯飾的手術予想の研究を進めること
- (2) 結び目の鏡像が得られるバンド変形の実例に基づき、それらのメカニズムの解明を進めること
- (3) 双曲結び目の例外的デーネ手術の分類問題において、交代結び目について解決がみられたことから、次のステップとして双曲2橋絡み目に沿った例外的デーネ手術の分類を行うこと

3. 研究の方法

- (1) 全ての向き付け可能な閉3次元多様体は絡み目に沿ったデーネ手術で得られることが知られています。よって、任意の3次元多様体は、絡み目とそれらの成分に沿ったデーネ手術の係数によって記述されます。この事実から、3次元多様体の不変量を絡み目の表記から得る研究が古くから行われており、多くの結果がこれまで整備されています。本研究では、それらの不変量の計算を駆使することで、純矯飾的デーネ手術が存在しないことを示します。
- (2) 結び目の鏡像が得られるバンド変形の二重分岐被覆空間を観察することで、そのメカニズムの解明を目指します。この手法はモンテシノス・トリックと呼ばれ、古典的な手法ですが、低次元トポロジーにおける現象に対する視覚的な理解を深めるにあたり、非常に有用な方法です。
- (3) 2橋絡み目の片方の成分に沿った例外的デーネ手術はすでに全て分類されているので、両方の成分に沿ってデーネ手術した際にはじめて非双曲的になるようなデーネ手術に焦点をあてて研究を進めます。
特に、Ying-Qing Wu の構成に倣い2橋絡み目の外部空間に入る分岐曲面を構成することで、外部空間に本質的なラミネーションを構成することができます。さらに、分岐曲面に幾何的な条件を課すことで、絡み目に沿ったデーネ手術後にも本質的に生き残るラミネーションを構成することができます。この手法によって例外的デーネ手術を許容する双曲的2橋絡み目のクラスを制限します。
続いて、上述の考察を経て残った絡み目についてはコンピュータを援用して例外的デーネ手術を調べます。

4. 研究成果

- (1) 任意の非自明な 2 橋結び目は純コスメティック手術対 (2 つの異なるスロープに沿ったデーネ手術の対で, 向きを込めて同相な 3 次元多様体を生むようなもの) を許容しないことを証明しました. すわなち, 現在の低次元トポロジー研究における重要な未解決問題のひとつである「コスメティック手術予想」を 2 橋結び目について肯定的に解決しました. この結果は学術論文 (市原一裕氏 (日本大学), 斎藤敏夫氏 (上越教育大学), Thomas Mattman 氏 (California state University, Chico) との共著) として学術雑誌 Algebraic and Geometric Topology に掲載されました. その論文においてさらに, 全ての交代的ファイバー結び目および交代的プレッツェル結び目についても, コスメティック手術予想に対する肯定的な解答を得ました. 本研究では, 結び目の符号数, 結び目の $SL(2; \mathbb{C})$ キャッソン不変量, および有限型不変量である結び目のジョーンズ多項式の係数に関する計算を駆使することで, 問題の解決に至りました. 2 橋結び目は, 結び目理論における基本的でありながら, 様々なよい性質を持った非常に重要なクラスです. そのクラスに対して, 不変量の計算を駆使することで, 問題の解決に至ったことは, 今後のコスメティック手術予想に関する研究におけるひとつのマイルストーンになると考えられます.
- (2) 交代結び目, およびモンテシノス結び目が純矯飾的手術をもつための障碍となる不変量の計算を行い, これらの結び目に対する矯飾的手術予想の部分的な解答を得ました. 具体的には, コンウェイ多項式の 2 次の係数, ならびに次数 3 の有限型不変量に関する計算を行い, 交代結び目, またはモンテシノス結び目で純矯飾的手術を許容するクラスを有限個まで制限することができました. 特に, 交代結び目については 2 種類のクラスに制限できました. この研究については現在も引き続き研究を進めています. コンピュータの支援を受けることで問題の解決に取り組む予定です.
- (3) 例外的デーネ手術を許容する双曲的 2 橋絡み目をすべて決定しました. 2 橋絡み目の連分数表示に着目し, Wu ならびに Delman に倣って Farey 図式上で良いエッジパスを見つけることが, 2 橋絡み目の外部空間に分岐曲面を構成することに対応します. 本研究では, 良いエッジパスを見つけることができる連分数を全て列挙しました. これによって, 例外的デーネ手術を許容する双曲的 2 橋絡み目に大きな制限をつけることに成功しました. 続いて, 上述の考察を経て残った絡み目についてはコンピュータを援用して例外的デーネ手術について調べました. この研究についての成果は市原一裕氏 (日本大学), 正井秀俊氏 (東京工業大学) との共著論文として執筆し, 現在学術雑誌に投稿中です.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計1件（うち査読付論文 1件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Ichihara Kazuhiro, Jong In Dae, Mattman Thomas W, Saito Toshio	4. 巻 21
2. 論文標題 Two-bridge knots admit no purely cosmetic surgeries	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Algebraic & Geometric Topology	6. 最初と最後の頁 2411 ~ 2424
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2140/agt.2021.21.2411	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計6件（うち招待講演 3件/うち国際学会 1件）

1. 発表者名 鄭仁大
2. 発表標題 Alternating Montesinos knots admit no purely cosmetic surgeries
3. 学会等名 研究集会「拡大K00Kセミナー2021」
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 鄭仁大
2. 発表標題 Alternating Montesinos knots admit no purely cosmetic surgeries
3. 学会等名 東京女子大学トポロジーセミナー（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 In Dae Jong and Hidetoshi Masai
2. 発表標題 Complete exceptional surgeries on two-bridge links
3. 学会等名 The 16th East Asian Conference on Geometric Topology（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 鄭仁大
2. 発表標題 On purely cosmetic surgeries and Montesinos knots
3. 学会等名 東北結び目セミナー2020
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 鄭 仁大
2. 発表標題 Complete exceptional surgeries on two-bridge links
3. 学会等名 Friday Seminar on Knot Theory (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 市原一裕, 斎藤敏夫, 鄭仁大, T. W. Mattman
2. 発表標題 Two-bridge knots admit no purely cosmetic surgeries
3. 学会等名 日本数学会2020年度年会
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------