

令和 6 年 6 月 17 日現在

機関番号：34416

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2019～2023

課題番号：19K03484

研究課題名（和文）包括的グレブナー基底系を用いた特異点分類の自動化

研究課題名（英文）Automation of Classification of Singularity by using Comprehensive Groebner Systems

研究代表者

寺本 央 (Teramoto, Hiroshi)

関西大学・システム理工学部・准教授

研究者番号：90463728

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,300,000円

研究成果の概要（和文）：包括的グレブナー基底系概念をmixed moduleを扱えるように拡張し、計算代数を用いた特異点分類のための具体的なアルゴリズムを構築した。また、それを特異点の分類(A, K, C, R)同値、KB同値、(VK, VR)同値、あるいは近年泉屋らにより提唱されているより一般的な同値関係(A[G], K[G])(Izumiya, Geometric equivalence among smooth map germs, submitted)、さらにそれらの同変な場合、等に組織的に適用し、数学あるいは諸科学への特異点論の応用を推し進めた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究の多目的最適化への応用の結果は、その後、共著者の濱田らによって、滑らかとは限らない強凸問題に一般化され、ゲーム開発等に広く応用されている。

本研究はKirkのTransversalをより効率よく、一般的な分類に推し進め、成果である特異点分類のためのソフトウェアは、次世代の特異点研究の必須の道具となると期待される。

研究成果の概要（英文）：We extended the concept of comprehensive standard systems for modules to mixed-modules and we develop a concrete algorithm to compute it. We apply the algorithm to classification problems of singularities relative to A, K, C, R, and A[G], K[G]-equivalences. We apply the result to various fields including multi-objective optimization problems.

研究分野：特異点論

キーワード：特異点論 混合加群 包括的標準系 局所コホモロジー 多目的最適化

## 1. 研究開始当初の背景

ここでの特異点とは微分位相幾何学的な特異点を指すが、力学系理論における分岐現象(Golubitsky, Singularities and Groups in Bifurcation Theory, I and II, Springer (1988))をはじめとするさまざまな現象に出現し、近年の我々の研究により結晶のバンドギャップが閉じ、バンドのトポロジカルな性質が変化する瞬間に出現することも明らかになってきている(Teramoto, J. Math. Phys. 58, 073502 (2017))。一方で、数学の様々な設定の下でも特異点が発生することが明らかになってきており、泉屋らによるそのような特異点を包括的に記述する特異点論の一般的な枠組みも構築されつつある(Izumiya, Geometric equivalence among smooth map germs, submitted)。そのような状況において、数学あるいは諸科学から様々な設定の下で出現する特異点の分類が必要とされるようになってきた。また、一般論を構築する立場からどのような一般論が望ましいかを知るためには、個々の具体的な事例においてどのような特異点のクラスが出現しうるのかを知ることは重要なことである。

特異点の分類手法に関しては、Bruce らによる Complete Transversal 等(Bruce, Nonlinearity 10, 253 (1997))のいくつかの確立した手法があり、それを部分的に自動化した Kirk らによる Transversal と呼ばれる Maple で実装されたプログラムも存在する(Transversal, A Maple Package For Singularity Theory Version 3.1)が、

1.  $k$ -jet の空間を  $\mathbb{R}$  係数ベクトル空間とみなし、ガウスの消去法を用いて Complete Transversal を計算する方式を用いており、分類の対象となる写像芽の定義域と値域の次元、 $k$  が大きくなるにつれてベクトル空間の次元は急激に大きくなる。
2. モジュライパラメータが出現する場合にはその都度プログラムが出力する check list を調べ、個別に手でそれぞれの場合を調べる必要がある。
3. Maple 5 からバージョンが上がると動かない。
4. Complete Transversal で得られる特異点のリストは包括的であるが排他的ではない可能性がある。その判定をするためには特異点の認識問題を解き、重複を除いて最終的な分類表を構築する必要があるが、その部分の自動化はなされていない。

といういくつかの問題も知られており、ほとんどの分類がモジュライパラメータを含まない単純写像芽の分類、あるいは、非自明なモジュライパラメータを持たないような写像芽の分類にとどまっている。一方で、様々な設定、制約条件のもとでの特異点を分類すると、単純写像芽の分類だけでは分類の全貌を把握することが難しく、複雑なモジュライパラメータが出現するような状況でも機動的に分類できるようなアルゴリズムの構築が一般論の検証、特異点論の諸科学の応用両面にとって重要な課題となっている。

## 2. 研究の目的

本研究においては、包括的グレブナー基底系という近年発達してきた最新の計算代数の手法を用い、さらにそれを mixed module に拡張することにより、これらの問題を乗り越え、今まで知られている同値関係による特異点の分類(A, K, C, R)同値、KB 同値、(VK, VR)同値、あるいは近年泉屋らにより提唱されているより一般的な同値関係( $A[\rho(G)]$ ,  $K[\rho(G)]$ )、さらにそれらの同変な場合、等に組織的に適用することにより、数学あるいは諸科学への特異点論の応用を推し進めること、また、一般論構築の立場からはどのような一般論が望ましいかを再考することを目標とする。この方向性は西村尚史らによる「特異点とマザー理論」(特異点の数理 2、共立出版)のマザー理論の将来展望を書いたポストマザー理論の「可微分写像芽の A-同値による分類の進展、自動認識、可微分写像の特異点論の新たな応用」という3つの問題に答えることにもつながる特異点論としても重要な問いである。

## 3. 研究の方法

### (i) 接空間が加群(module)となる場合の分類

包括的グレブナー基底系の特異点論の分類に適用し、はじめに各分類に対して定義される接空間が加群(module)となる場合の分類を推し進める。例えば、(K, R)同値、 $K[G]$ 同値、VK 同値とそれらに同変性を加えた同値関係の分類がそれにあたる。包括的グレブナー基底系はパラメータ付のイデアル又は加群のグレブナー基底を計算するため

の方法であるが、パラメータが付いていると一般にはパラメータの値により、そのイデアル又は加群のグレブナー基底は変わりうる。包括的グレブナー基底系は、パラメータの空間をいくつかの局所閉集合(二つのザリスキ閉集合の差として書ける集合)に分解し、各々の局所閉集合に対し、そのパラメータにおけるグレブナー基底を計算するものである。加群のグレブナー基底を計算することができれば、特異点分類に付随する余次元を計算することもできるし、あるいは、分類に必要な Complete Transversal を計算することもできる。しかし、一般にパラメータ空間がどのように局所閉集合で分解されるのかは、包括的グレブナー基底系のアルゴリズムに依存して変わってしまう。最終的に得られた結果をアルゴリズムによらない形にするためには、包括的グレブナー基底系で得られた局所閉集合を同じ余次元、あるいは、Complete Transversal となるパラメータ領域にまとめる必要がある。そのような有限個の局所閉集合の合併集合(構成可能集合)の標準的な表現は Brunat ら(Brunat, Math. Comput. Sci. 9, 391, (2015))により与えられており、アルゴリズムによらない普遍的な表現を得るためには、与えられた構成可能集合を標準的な表現に変換する必要がある。その変換アルゴリズムも Brunat らによって与えられているが、構成可能集合が  $n$  個の局所閉集合の合併集合として書かれている場合、必要な計算時間は  $n$  とともに指数関数的に増大してしまう点、イデアルの Primary Decomposition を計算する必要がある点、という二つの大きな問題を抱えている。その問題を解決するため特に局所閉集合に関しては佐藤ら(Sato, Mathematics and Technology, LLC, 190, (2016))による表現も提案されているが、ここではより一般の構成可能集合に対し Brunat らのアルゴリズムを Primary Decomposition を使わないように改良すること、また、計算時間の指数関数的増大を防ぐため、あらかじめ結合可能な(部分的には Montes らの grobcov.lib の SimplifyUnion というプログラムでなされてはいるがまだ十分ではない)局所閉集合をまとめておき、できるだけ  $n$  の数を減らしておく、という工夫をすることでこの問題を解決する。

同変性が加味された場合には、分類の自動化に必要な有限確定性の統一的な評価がなく、現状で得られている評価はあまりよい評価ではない可能性があるが、Bierstone ら(Bierstone, The structure of orbit spaces and the singularities of equivariant mappings, Monografias de Mathematica N.35), 泉屋ら(Izumiya, Math. J. Okayama Univ. 24, 167 (1982))の同変写像芽の安定性に関する理論をもとに応用上重要な設定の下で  $k$  確定性の評価を改良できないかを考察する。よりシャープな有限確定性の評価を得ることができれば、それだけ低次の jet により特異点の型を判別することができるため、アルゴリズムの効率化のため重要な課題である。

以上が Complete Transversal に基づき、特異点の包括的ではあるが排他的ではないかもしれない特異点のリストを得るために必要な技術の開発である。そのリストが得られたならば計算代数の標準的な手法である消去イデアルの方法を用いることで認識問題を解き、リストから重複を除き、最終的な分類表を構築する方法論を構築する。また、得られた分類に幾何学的解釈を与えることも重要であり、そのために包括的グレブナー基底系をもちいモジュライパラメータに依存して分類の各クラスの不変量がどのように変化するのか(あるいは一定なのかを)計算するための枠組みも構築する。その不変量には例えば Mather らによる重複度(Mather, Publ. Math. I' I. H. É. S., 35, 127 (1968))、ハミルトニアンで出てくるチャーン数(Teramoto, J. Math. Phys. 58, 073502 (2017))やスピンの配向をベクトル場だと考えたときの Winding Number (Teramoto, in preparation)、分岐図式対して定義される Vassiliev 型不変量(Ohmoto, Contemporary Math., AMS 569 143-160 (2012))等の不変量が挙げられるが、分類を機動的に進めていく際に新たな分類の不変量が見つかる可能性もあり、それらに関しても計算代数により自動的に計算する手法を開発する。

最後に、Adjacency Diagram という各分類のクラスの隣接関係を表すものを包括的グレブナー基底系で自動的に構築する方法論を確立する。これは分類のリストが排他的で包括的であるかを検証するためにも重要であるし、特異点の分岐図式を書くうえでも重要である。また、モジュライパラメータを持つ写像芽の分岐図式を書く際、モジュライファミリーに沿う開折方向とそれ以外の方向に開折の軸ができるだけ分離されている等、見通しよく分岐図式を書くための方法論も検討する。

## (ii) 接空間が mixed-module となる場合の分類

ここまですべての分類に対して定義される接空間が加群(module)となる場合の分類の話である。一般には同値関係の取り方に依り、接空間が加群とならず mixed module となる。例えば、 $A$  同値、 $A[\square(G)]$  同値、 $KB$  同値等である。これらは接空間が加群とならずより一般の mixed module というものになる。この場合には加群のためのグレブナー基底を使うことができない。このことが Kirk をしてグレブナー基底によらない  $k$ -jet の空間を巨大な  $R$  係数ベクトル空間として取り扱う方法を開発せしめた理由である。しかし、近年 mixed module に対してもそのグレブナー基底の概念(Gatermann, J. Symb. Comp. 40, 1180 (2005))が拡張され、力学系の分岐理論に適用された。この一般化により、Kirk らの Transversal より効率的に分類が進められるのではないかと期待されるが、これはパラメータ付の mixed module には拡張されていないので、この方法だとモジュライパラメータにはまだ個別に対応せざるを得ない。実際、この Gatermann の結果でも複雑なモジュライパラメータが出現するような分類には適用されていない。本研究では、この mixed module に対するグレブナー基底を包括的グレブナー基底系に一般化し、その具体的な計

算アルゴリズムを与えることにより、以上のような接空間が mixed module になる同値関係による特異点の自動化アルゴリズムを構築する。それを構築したのち接空間が加群となる場合 (i) と同様にして、計算代数による特異点の認識問題の自動化、不変量の包括的グレブナー基底系を用いた計算の自動化、Adjacency Diagram の自動構築のための手法を確立する。

最後に構築したアルゴリズムを (A, K, C, R) 同値、KB 同値、(VK, VR) 同値、あるいは近年泉屋らにより提唱されているより一般的な同値関係 (A[G], K[G])、さらにそれらの同変な場合に適用する。まずは分類がすでになされている事例 (Rieger, J. London Math. Soc. 36, 351 (1987), D. Mond, Proc. London Math. Soc. 50, 333 (1985), Rieger, Hokkaido Math. J., 33, (2004), Nabarro, Cadernos de Math. 02, 201 (2001)) に対して、このアルゴリズムを適用し、その妥当性を検証し、そのあとで分類が未知の同値関係の分類を推し進める。分類を整理する方法としては、大きく分けて 4 つ考えられる。

- \* 拡大接空間の余次元の低いものからある余次元まで分類する。
- \* モジュライパラメータの数で整理し (単純写像芽、uni-moduli, bi-moduli 等)、モジュライパラメータの数がある値以下のものを分類する。
- \* モジュライファミリー全体としてみたときの余次元で整理し、ある余次元まで分類する。
- \* 有限確定性が期待できない場合には k-jet までを分類する。

現状最も多くみられる整理の仕方としては、1 番目の方法であるが、応用によっては 2、3、4 も重要になり、この 4 通りのやり方で分類する具体的なアルゴリズムを確立する。また、異なる同値関係で得られた分類の差を評価するための不変量を導入し、ある同値関係が他の同値関係との強弱を定量化し、異なる同値関係間の関係性を明らかにすることを試みる。このような大所高所に立った同値関係の整理は、本研究のアルゴリズムがあって初めて可能になるものであり、また、このような同値関係の整理により新たな一般論を構築するための契機が得られると期待される。

#### 4 . 研究成果

包括的グレブナー基底系の概念を mixed module を扱えるように拡張し、計算代数をもちい特異点分類のための具体的なアルゴリズムを構築した。成果を

Hiroshi Teramoto, Katsusuke Nabeshima

Parametric standard system for mixed module and its application to singularity theory, ISSAC '20: Proceedings of the 45th International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, July 2020, Pages 426–433.

Hiroshi Teramoto, Katsusuke Nabeshima

Comprehensive standard system for generalized mixed module and its application to singularity theory Journal of Algebra and Its Applications, 2450221, 2023.

にて報告した。また、そのプログラムを広く一般に活用していただくため、

[https://github.com/hiroshi-teramoto/mixed\\_module\\_v4.3.2](https://github.com/hiroshi-teramoto/mixed_module_v4.3.2)

にて公開した。

また、それを特異点の分類 (A, K, C, R) 同値、KB 同値、(VK, VR) 同値、あるいは近年泉屋らにより提唱されているより一般的な同値関係 (A[ $\rho$ (G)], K[ $\rho$ (G)]) (Izumiya, Geometric equivalence among smooth map germs, submitted)、さらにそれらの同変な場合、等に組織的に適用し、数学あるいは諸科学への特異点論の応用を推し進めた。例えば、多目的最適化への応用は論文

Naoki Hamada, Kenta Hayano, Shunsuke Ichiki, Yutaro Kabata, and Hiroshi Teramoto

Topology of Pareto Sets of Strongly Convex Problems, 30, 3, 2659—2686, 2020.

にて報告している。この論文の結果は、その後、共著者の濱田らによって、滑らかとは限らない強凸問題に一般化され、ゲーム開発等に広く応用されている。

本研究は Kirk の Transversal をより効率よく、一般的な分類に推し進め、成果である特異点分類のためのソフトウェアは、次世代の特異点研究の必須の道具となると期待される。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 6件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Naoki Hamada, Kenta Hayano, Shunsuke Ichiki, Yutaro Kabata, and Hiroshi Teramoto	4. 巻 30
2. 論文標題 Topology of Pareto Sets of Strongly Convex Problems	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 SIAM Journal on Optimization	6. 最初と最後の頁 2659--2686
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1137/19M1271439	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Hiroshi Teramoto, and Katsusuke Nabeshima	4. 巻 45
2. 論文標題 Parametric standard system for mixed module and its application to singularity theory	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 ISSAC '20: Proceedings of the 45th International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, July 2020	6. 最初と最後の頁 426--433
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1145/3373207.3404027	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Teramoto H., Tsuchida A., Kondo K., Izumiya S., Toda M., Komatsuzaki T.	4. 巻 21
2. 論文標題 Application of Singularity Theory to Bifurcation of Band Structures in Crystals	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Singularities	6. 最初と最後の頁 268-281
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.5427/jsing.2020.21p	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 YAMADA Takayuki, MASAMUNE Jun, TERAMOTO Hiroshi, HASEBE Takahiro, KURODA Hirotooshi	4. 巻 85
2. 論文標題 Topology optimization with geometrical feature constraints based on the partial differential equation system for geometrical features (Overhang constraints considering geometrical singularities in additive manufacturing)	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Transactions of the JSME (in Japanese)	6. 最初と最後の頁 19-00129-00129
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1299/transjsme.19-00129	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Teramoto Hiroshi, Kondo Kenji, Izumiya Shyuichi, Toda Mikito, Komatsuzaki Tamiki	4. 巻 60
2. 論文標題 Erratum: "Classification of Hamiltonians in neighborhoods of band crossings in terms of the theory of singularities" [J. Math. Phys. 58, 073502 (2017)]	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 129901 ~ 129901
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1063/1.5131379	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Teramoto Hiroshi, Nabeshima Katsusuke	4. 巻 -
2. 論文標題 Comprehensive standard system for generalized mixed module and its application to singularity theory	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Journal of Algebra and Its Applications	6. 最初と最後の頁 2450221
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/S0219498824502219	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計22件 (うち招待講演 13件 / うち国際学会 11件)

1. 発表者名 Hiroshi Teramoto
2. 発表標題 Recognition and Bifurcation of Constraints and Feasible-Set-Germs in Optimization Problems
3. 学会等名 The 15th Mathematical Society of Japan - Seasonal Institute, Deepening and evolution of applied singularities (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年 ~ 2023年

1. 発表者名 Hiroshi Teramoto
2. 発表標題 Classification Algorithms of Real Singularities (1)
3. 学会等名 RIMS-Sing 4 Workshop, Classification problems in singularity theory and their applications Deepening and evolution of applied singularity (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年 ~ 2023年

1. 発表者名 Hiroshi Teramoto
2. 発表標題 Classification Algorithms of Real Singularities (2)
3. 学会等名 RIMS-Sing 4 Workshop, Classification problems in singularity theory and their applications Deepening and evolution of applied singularity (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年～2023年

1. 発表者名 寺本 央
2. 発表標題 実特異点の分類アルゴリズム
3. 学会等名 IMI共同利用研究公開ワークショップ(限量子消去の効率的なアルゴリズムの構築と産業課題解決への応用)(招待講演)
4. 発表年 2022年～2023年

1. 発表者名 濱田直希、早野健太、寺本 央
2. 発表標題 多目的最適化問題における制約関数芽および実行可能領域芽の 分類と認識
3. 学会等名 日本数学会2023年度会
4. 発表年 2022年～2023年

1. 発表者名 寺本 央
2. 発表標題 パレート集合およびフロントの局所構造とその分岐
3. 学会等名 「進化計算の数理」(招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Hiroshi Teramoto
2. 発表標題 Classification, recognition and bifurcation of feasible set germs
3. 学会等名 Bilateral Joint Research Project Workshop "Singularities, arrangements, and low dim. topology" (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 寺本 央
2. 発表標題 拘束条件および実行可能集合芽の分類、認識および分岐
3. 学会等名 「フォレストワークショップ」
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 寺本 央
2. 発表標題 Standard System for Generalized Mixed Module and its Application to Singularity Theory
3. 学会等名 研究集会【幾何や自然科学に現れる特異点】
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Hiroshi Teramoto, and Katsusuke Nabeshima
2. 発表標題 Parametric Standard System for Mixed Module and its Application to Singularity Theory
3. 学会等名 The International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (ISSAC) (国際学会)
4. 発表年 2020年



1. 発表者名 寺本 央
2. 発表標題 特異点論によるバンド交差の幾何構造の分類、分岐解析およびその不変量の解析
3. 学会等名 応用特異点論ラボ
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 寺本 央
2. 発表標題 特異点論によるバンド交差の幾何構造の分類、分岐解析およびその不変量の解析
3. 学会等名 研究集会「特異点論による空間研究」
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hiroshi Teramoto
2. 発表標題 Automation Algorithms of Classification of Singularities, Current Status and Future Perspectives
3. 学会等名 Russian-Japan-Joint-Workshop, Moscow (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hiroshi Teramoto
2. 発表標題 Classification of band crossing geometries, their invariants and bifurcations
3. 学会等名 6TH International Workshop "Singularities in Generic Geometry and its Applications" (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 寺本 央、加葉田雄太郎、早野健太、濱田直希
2. 発表標題 パレート集合に出現しうる特異点の型の分類
3. 学会等名 計算科学が拓く汎分野研究
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 寺本 央
2. 発表標題 計算機でチャレンジする写像の特異点の分類とその応用
3. 学会等名 「令和元年度第1回徳島数学談話会（冬の会）」（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hiroshi Teramoto, Yutaro Kabata, Kenta Hayano, and Naoki Hamada
2. 発表標題 Type of singularity that can appear in Pareto set
3. 学会等名 20th RIES-HOKUDAI International Symposium (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hiroshi Teramoto, Yutaro Kabata, Kenta Hayano, and Naoki Hamada
2. 発表標題 Type of singularity that can appear in Pareto set
3. 学会等名 2019 International Symposium of RIES (Hokkaido University) and CEFMS(NCTU) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 寺本 央
2. 発表標題 特異点論によるバンド交差の幾何構造の分類、不変量および分岐の解析
3. 学会等名 離散幾何解析とその周辺 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hiroshi Teramoto and Katsusuke Nabeshima
2. 発表標題 Standard Basis for Mixed Module, Computational Algorithm and Application to Classification Problems in Singularity Theory
3. 学会等名 研究集会「可微分写像の特異点論とその応用」
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hiroshi Teramoto
2. 発表標題 Algorithms for classification of real singularities
3. 学会等名 WORKSHOP on Algebraic and Analytic Singularities (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Hiroshi Teramoto
2. 発表標題 On constraint qualifications in multi-objective optimization problems
3. 学会等名 WORKSHOP on Mathematics for Industry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	鍋島 克輔  (Katsusuke Nabeshima)  (00572629)	東京理科大学・理学部第一部応用数学科・准教授   (32660)	
研究分担者	加葉田 雄太郎  (Kabata Yutaro)  (40830097)	長崎大学・情報データ科学部・助教   (17301)	
研究分担者	泉屋 周一  (Izumiya Shyuichi)  (80127422)	北海道大学・理学研究院・名誉教授   (10101)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------