

令和 6 年 6 月 11 日現在

機関番号：12102

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2019～2023

課題番号：19K03485

研究課題名（和文）カオス力学系に出現する不変集合の複雑性の研究

研究課題名（英文）Study of the complexity of invariant sets appearing in chaotic dynamical systems

研究代表者

加藤 久男 (Kato, Hisao)

筑波大学・数理物質系（名誉教授）・名誉教授

研究者番号：70152733

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,300,000円

研究成果の概要（和文）：データ解析、時系列解析から両側力学系を再構成できるという多様体上のTakensの埋込み定理が知られているが、研究代表者は本研究で、Takensの定理をより一般的な空間と連続写像にまで拡張できることを示した。Takensの定理は、実験から数学モデルの再構成可能性を保証する実験科学における最重要な定理であるが、適用範囲は多様体上の滑らかな力学系に限られる。研究代表者の定理は、より複雑な空間の片側力学系にも応用できる広範な定理である。なんの制限もない片側力学系を解明するには、時系列データの遅延座標による(軌道的)埋込みが鍵になることを理論的・数学的に証明した定理である。

研究成果の学術的意義や社会的意義

多様体上のTakensの埋込み定理が知られている。本研究で、“滑らかさを仮定しない一般的な空間と連続写像”にまでTakensの定理が拡張できることを証明した。つまり、Takensの埋め込み定理は「topology categoryにおける再構成定理」まで拡張できる。Takensの定理は、実験データから数学モデルの再構成可能性を保証する実験科学における貴重な定理であるが、多様体上の滑らかな力学系に限られていた。我々の定理は現実の世界の現象の再構築理論にとって重要である。

研究成果の概要（英文）：Takens' embedding theorem on manifolds is known to allow the reconstruction of two-sided dynamical systems from data and time series analysis. Takens' theorem is the most important in experimental science. It guarantees the possibility of reconstructing mathematical models from experiments, but its scope is limited to smooth dynamical systems on manifolds. Our theorem is a broad theorem that can be applied to one-sided dynamical systems in more complex spaces. The theorem theoretically and mathematically proves that (orbital) embedding of time series data in delay coordinates is the key to unraveling one-sided dynamical systems without any restrictions.

研究分野：幾何学

キーワード：カオス力学系 位相次元 エントロピー

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

非線形現象に関して、各因子の相関関係と因果関係がある程度分かった現象については、データサイエンスで活発に研究されている。主に確率・統計を武器に、機械学習・Deep Learning・ニューラルネットワーク・AIなどの形でその研究がおこなわれ、多くの社会現象、商品開発、創薬、経済などで大きな成果を上げている。しかしながら、各因子の相関関係と因果関係などがまるで未知の非線形現象については、データサイエンスの方法論は役に立たない場合が多い。こうした現象については、Empirical dynamic model (実験に基づいた時系列データからの力学系モデル)を使用した研究が活発である。複雑な自然現象、特に物理現象、物質工学、気候変動、地球環境、生命科学(脳科学、心臓・心電図)、生態系などの分野で多くの研究があるが、ほとんどが実験的なものであり、数学的・理論的な研究は数少ない。Empirical dynamic modelの理論的な(数学的な)基礎として、Takens 埋込み定理(1981)がある。この分野のほとんどの研究がこの定理を基礎としている。このTakens 定理は、実際の実験データ(1次元データ)から殆どすべての滑らかな現象を(コンピューター上で幾何的に)再構成できることを保証するもので、現在の実験科学にとって極めて重要な定理となっている。1981年 Takens がこの定理を証明して以来、多くの実験科学でこの定理が使用されてきたが、そこで扱われる対象は滑らかな多様体上の力学系に限られるはずであった。しかし、こうした実験科学分野では、ほとんどの研究者は現象が smooth かどうかを吟味しておらず無条件でsmooth 性を仮定して研究している。

2. 研究の目的

本研究の目的は、トポロジーによる非線形現象の研究、特にカオス力学系に出現する複雑な不変集合の力学的・幾何的構造を解明することである。「力学系のカオス(軌道の複雑性)は、なぜ幾何的構造の複雑性を導くのか」という根本的な問題に解答を与えたい。数値計算によってコンピューター上に出現するストレンジ・アトラクターなどの不変集合は、大変複雑な幾何構造をなしている場合が多く、そうした複雑なコンパクト距離空間の幾何構造・力学的構造はたいへん興味深い研究対象である。現在、区分的に微分可能な力学系・摩擦を許容する物理現象など、“滑らかさを仮定しない力学系”の研究も大変活発となっている。そのため、本研究では最も一般的な設定で(つまり、コンパクト距離空間とその上の連続写像の力学系という設定で)、位相空間論・次元論・幾何学的トポロジー・位相力学系理論およびエルゴート理論などを駆使して総合的に研究していく。力学的構造と幾何的構造について理論的かつ統一的な解明を研究目的とする。更に、こうした研究を発展させて、「実験データ、特に時系列データから、滑らかさを仮定しない非線形現象を再構成できるか」という(実験)科学の重要なテーマについて、数学的・トポロジー的側面からの解答を与えたい。

3. 研究の方法

本研究の学術的な特色・独創的な点は、コンパクト距離空間とその上の連続写像という非常に一般的な研究対象を、位相空間論、幾何学的トポロジー(特に、連続体論)力学系理論およびエルゴート論を駆使して総合的に研究することである。位相力学系、連続体論および位相空間論の方法論を融合して可分距離空間上の力学系の原理的な構造の解明に役立てたい。特に位相空間論からの研究という基本原理に立ち返った研究方法は、本研究の大きな特色でもある。位相空間論は、対象とする空間の種々の問題を最も理想的・抽象的な形で設定するための概念・手法を提

供する。最も基本的な原理原則からの本質を見極めた研究が可能となる大きな利点をもつ。実際、研究代表者の最近の研究成果である「topology category におけるカオス力学系の再構成定理」の証明においても、こうした位相空間論・次元論の利点が遺憾なく発揮されている。

4 . 研究成果

データ解析、時系列解析から滑らかな力学系を再構成できるという有名な多様体上のTakensの埋込み定理が知られている(さらに一般化した Sauer, Yorke, Casdagli の Embedologyなど)。研究代表者は2021 - 2023年の研究で、”滑らかさを仮定しない一般的な空間と連続写像”にまで Takensの定理が拡張できることを証明した。つまり、Takens の埋め込み定理は「topology category における再構成定理」まで拡張できる。Takens の定理は、実験データから数学モデルの再構成可能を保証する実験科学における貴重な定理であるが、多様体上の滑らかな力学系(可逆的な)に限られていた。Takens による証明は微分幾何学の方法論で証明された。Takens は (Whitney の) ユークリッド空間への埋め込み定理を基本的に使用した。研究代表者の証明では、位相空間論、特に次元論が大きな力を発揮している。我々の定理は、ユークリッド空間への埋め込み定理をも導く、より根源的な方法(位相空間論・次元論)を採用することで初めて証明された(J. Math. Soc. Japan (2020), Fund. Math. (2021), Nonlinearity (2023))。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計9件（うち査読付論文 6件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

| | |
|---|-------------------------|
| 1. 著者名 H. Kato | 4. 巻 36 |
| 2. 論文標題 Takens-type reconstruction theorems of one-sided dynamical systems | 5. 発行年 2023年 |
| 3. 雑誌名 Nonlinearity | 6. 最初と最後の頁 1571-1592 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

| | |
|--|---------------------|
| 1. 著者名 H. Kato | 4. 巻 2029 |
| 2. 論文標題 Dynamical properties of doubly 0-dimensional maps | 5. 発行年 2022年 |
| 3. 雑誌名 数理解析研究所講究録 | 6. 最初と最後の頁 92-99 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし | 査読の有無 無 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

| | |
|--|-----------------------|
| 1. 著者名 H. Kato | 4. 巻 253 |
| 2. 論文標題 Jaworski-type embedding theorems of one-sided dynamical systems | 5. 発行年 2021年 |
| 3. 雑誌名 Fund. Math. | 6. 最初と最後の頁 205-218 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

| | |
|--|---------------------|
| 1. 著者名 H. Kato | 4. 巻 2209 |
| 2. 論文標題 Dynamical properties of doubly 0-dimensional maps | 5. 発行年 2022年 |
| 3. 雑誌名 数理解析研究所講究録 | 6. 最初と最後の頁 92-99 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし | 査読の有無 無 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

| | |
|---|---------------------|
| 1. 著者名 H. Kato | 4. 巻 2179 |
| 2. 論文標題 Reconstructions of One-sided Dynamical Systems from the Analysis of Experimental Time Series | 5. 発行年 2021年 |
| 3. 雑誌名 数理解析研究所講究録 | 6. 最初と最後の頁 75-88 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし | 査読の有無 無 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

| | |
|--|-----------------------|
| 1. 著者名 H. Kato | 4. 巻 253 |
| 2. 論文標題 Jaworski-type embedding theorems of one-sided dynamical systems | 5. 発行年 2021年 |
| 3. 雑誌名 Fund. Math. | 6. 最初と最後の頁 205-218 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4064/fm894-6-2020 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

| | |
|---|-----------------------|
| 1. 著者名 H. Kato and M. Matsumoto | 4. 巻 72 |
| 2. 論文標題 Finite-to-one zero-dimensional covers of dynamical systems | 5. 発行年 2020年 |
| 3. 雑誌名 J. Math. Soc. Japan | 6. 最初と最後の頁 819-845 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2969/jmsj/82128212 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

| | |
|---|-----------------------|
| 1. 著者名 H. Kato | 4. 巻 247 |
| 2. 論文標題 Topological entropy and IE-tuples of indecomposable continua | 5. 発行年 2019年 |
| 3. 雑誌名 Fund. Math. | 6. 最初と最後の頁 131-149 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4064/fm401-12-2018 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

| | |
|---|-------------------------|
| 1. 著者名 H. Kato | 4. 巻 147 |
| 2. 論文標題 Monotone maps of G-like continua with positive topological entropy yield indecomposability | 5. 発行年 2019年 |
| 3. 雑誌名 Proc. Amer. Math. Soc. | 6. 最初と最後の頁 4363-4370 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/proc/14602 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

〔学会発表〕 計6件 (うち招待講演 6件 / うち国際学会 2件)

| |
|---|
| 1. 発表者名 H. Kato |
| 2. 発表標題 Dynamical systems of doubly 0-dimensional maps |
| 3. 学会等名 RIMS共同研究 (招待講演) |
| 4. 発表年 2021年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 H. Kato |
| 2. 発表標題 Takens-type reconstruction theorems of non-invertible dynamical systems on compact metric spaces |
| 3. 学会等名 研究集会「葉層構造の幾何学とその応用」 (招待講演) |
| 4. 発表年 2020年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 H. Kato |
| 2. 発表標題 Reconstructions of One-sided Dynamical Systems from the Analysis of Experimental Time Series |
| 3. 学会等名 RIMS 共同研究「一般位相幾何学とその関連分野の進展」 (招待講演) |
| 4. 発表年 2020年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 H. Kato |
| 2. 発表標題 Jaworski-Takens-Gutman Type Embedding Theorems of One-sided Dynamical Systems |
| 3. 学会等名 Conference on Geometric Topology and Related Topics, Mazatlan (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2019年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 H. Kato |
| 2. 発表標題 Topological entropy and IE-tuples of G-like indecomposable continua |
| 3. 学会等名 Third Pan-Pacific International Conference on Topology and Applications (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2019年 |

| |
|-------------------------------------|
| 1. 発表者名 H. Kato |
| 2. 発表標題 位相エントロピーと空間の複雑性 |
| 3. 学会等名 早稲田大学理工・トポロジーセミナー (招待講演) |
| 4. 発表年 2019年 |

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

| 氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号) | 所属研究機関・部局・職 (機関番号) | 備考 |
|---------------------------|-----------------------|----|
|---------------------------|-----------------------|----|

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

| 共同研究相手国 | 相手方研究機関 |
|---------|---------|
|---------|---------|