2版

様　式　C－19、F－19－1、Z－19　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　5 年　6 月 19 日現在

機関番号：１２４０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2019～2022
課題番号：１９Ｋ０３４８６
研究課題名（和文）特異点論は曲面論等の数学にいかに応用されるか

研究課題名（英文）How is singularity theory applied to mathematics such as surface theory

研究代表者
福井　敏純（Fukui, Toshizumi）

埼玉大学・理工学研究科・教授

研究者番号：９０２１８８９２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,300,000円

研究成果の概要（和文）：特異点論を応用してフロントとよばれる特異曲面の標準形定理を確立し，これを 特異曲面の微分幾何的研究に役立てようというのは目的の一つであった.これは 3 次元ユークリッド空間内のカスプ辺やツバメの尾と呼ばれる特異点では確立できその結果をOsaka Math J に論文として報告した.
多項式写像の特異性を記述するという問題については，多項式写像の非固有点の 軌跡をニュートン図形を用いて具体的記述をすることに成功した.研究代表者と土 屋健希氏との共同研究であり，その成果はArnold Math J に論文として発表されている.

研究成果の学術的意義や社会的意義
特異点論が多くの現象を記述することは，特異点論が極値問題の一般化と捉えれば自明の事である．本研究では，カスプ辺やツバメの尾と呼ばれる特異点を持つ曲面の研究，特にその局所有限不変量の決定，並びに多項式写像の非固有点軌跡のニュートン図形を用いた具体的記述などが成果であり，学術的な意義は高い．　さらに，カスプ辺の研究は微分幾何学者が興味を持つ時空のカスプ辺の研究へ繋がり，新たな研究の展開を見せている．特異点論と微分幾何学というフィールドをつなぐ社会的意義もあると判断している．

研究成果の概要（英文）：One of our goals was to establish a normal form theorem for singular surface called fronts by applying singularity theory, and to use it for differential geometrical studies of singular surfaces. This was established for singular points called cuspisdal edges and swallow tails in three-dimensional Euclidean space, and the results were published as a paper in Osaka Math J.
As for the problem of describing the singularity of polynomial mappings, we have succeeded to obtain a concrete description of the locus of non-properpoints of polynomial mappings using Newton diagrams. This is a joint work with Takeki Tsuchiya, and the results have been published in Arnold Math J as a paper.

研究分野：数学

キーワード：特異点論

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

特異点論は，写像を標準形に還元する理論として成立した。従って写像を使って記述される数学的対象すべてに応用がある。本研究はこの視点で、特異点論がどの様に様々な数学的対象の記述に応用されるかを見出すことが目標である．例えば曲面論はその様な立場からは格好の材料を提供する。特異点を持つ代数多様体や微分方程式の解も，写像の零点と捉えることができ、特異点論のフィールドである。

特異点論は、歴史的にはルネ・トム，ミルナー，スメールといった人々によって研究された微分トポロジーから派生した理論である．ルネ・トムによって提起されマザーによって確立された安定写像の理論は，アーノルドによって関数の単純特異点，ユニモジュラー特異点などより精密な分類につながり，安定写像の構成に重要な役割を果たした有限決定性や普遍開折の理論等の重要性が認識され，特異点論の重要な一塊をなしている．これらの理論を、写像を使って記述される数学的対象に応用しようというのが本研究の趣旨である。応用のフィールドとしては、曲面論、実代数幾何、分岐理論を想定している。

理論初期にルネ・トムが著書「構造安定性と形態形成」で，D_4 特異点の幾何と曲面の臍点の幾何との類似性を指摘したが，これはポーチャス (J. Differential Geometry 5 (1971)) によって距離 2 乗関数の特異点を解析することで正当化された．ポーチャスの計算から多くの微分幾何的不変量が自然に導出でき，峰点 (ridge) というそれまでの微分幾何学者が意識していなかった条件（3 次の項の条件）を導出した．

このようなことは数多くあると思われる．例えば、研究代表者は先行研究で、3 次元ユークリッド空間内の曲面と円柱の接触を研究し円柱方向（接触円柱の母線方向）の概念が 3 次の常微分方程式で表されること、及びそれらの基本性質を明らかにした。特異点論の専門家である Farid Tari に「なぜ 3 次の常微分方程式なんだ？」驚かれた事もある。幾何学的文脈では主方向・漸近方向等 2 次の常微分方程式ばかりで、3 次の常微分方程式が幾何学的文脈で導出されたのは初めてだった事やどうやって 3 次の式が導出されるのかという素朴な疑問が、彼の驚きとなったと思っている。

特異点論を数学の諸分野に応用しようというアイデアは、1998 年に泉屋周一と石川剛郎が「応用特異点論」（共立出版）を著した時に、著者達の念頭に明快にあったと思われる。他方、極小曲面や平均曲率一定曲面を分類しようと試みる微分幾何学者達が、特異点論へアプローチしてきた。極小曲面や平均曲率一定曲面はしばしば

フロントと呼ばれる特異曲面で、特異点の解析が避けて通れないからである。次の論文が代表的例である。

K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, The geometry of fronts. Ann. of Math. (2) **169** (2009), 491 – 529.

曲面論は大変実りの多い分野で最近彼等はこれまでの研究を 1 冊の次の本にまとめた。梅原、佐治、山田著「特異点をもつ曲線と曲面の微分幾何学」丸善出版、2017 年 11 月

まえがきに「微分幾何学の立場から見ると、特異点は近寄りがたい対象で、ともすると『見なかったことにしてしまう』という扱いを受けていたきらいもある。」と述べられているように、幾何学的には特異点はないものとして扱いたいものなのである。逆に言えば、特異点論の立場から曲面論を見ると、微分幾何学者には見えないものが見え、豊穣なフィールドに見えるのである。

２．研究の目的

微分幾何学，代数多様体，微分方程式論はそれぞれ歴史をもち，特異点論と関係なく語ることも可能であるが，本研究の立脚点は特異点論にあり，その立場から曲面論や代数多様体感の写像，偏微分方程式の解の分岐理論などを見直す事により従来アプローチできなかった問題を開拓し、新たな研究進展を得る事を目標としている.

３．研究の方法

研究の方法としては、時間をしっかり確保し共同研究者とフェイスツーフェイスで行うセミナーを重視して、これまで築いてきた国内外の研究者との協力関係を発展させる形での研究の進展を行う。そのため研究代表者を出張させ研究を行う．併せて，関連研究の文献を収集しそれらを精査し，取り組んでる課題への有効性を検討することも行う.

４．研究成果

特異点論を応用してフロントとよばれる特異曲線の標準形定理を確立し，これを特異曲面の微分幾何的研究に役立てようというのは目的の一つであった．これは 3 次元ユークリッド空間内のカスプ辺やツバメの尾と呼ばれる特異点では確立できその結果は次の論文として報告されている.

T. Fukui, Local differential geometry of cuspidal edge and swallowtail,Osaka J. Math. 57 (2020), 961–992

この論文では，カスプ辺の標準形を確立する部分は比較的容易であったと思うが，

スバメの尾の標準形を確立する計算は難産であった．素直な帰納的構成がうまく行かず，例えるなら，自由度を持って各ステップでの不変量候補の帰納的構成を行い，2 ステップ戻って不変量を確定させるといった手続きが必要であったからである．

実は，この研究には続きがある．この論文のカスプ辺解析のアイデアを，時空のカスプ辺に適用し，その標準形，特に曲率などの特徴的な不変量の性質について調べている．これは，東京工業大学の梅原雅顕氏，東北師範大学の裴東河氏，吉林財経大学の于海鴎氏等との共同研究になり定期的に検討会を開いている．しかしながら，因果型は多岐に渡り，検討するたびに新たな問題点や着目点が浮かび上がり，ユークリッド空間のときのカスプ辺解析の単純明快さとは全く異なり，思いもかけず長い論文になりそうである．現在 40 ページの原稿があるが，まもなく脱稿できると思う．

微分幾何的な関連研究としては研究代表者の元学生である本多修平氏が，特異点をもたない曲面の中心射影を中心をパラメータとする族と考え，この族のバーサリティを問題としバーサリティを持つ条件を完全に決定して論文として発表した．私としては嬉しい副産物であるので，ここに注意しておきたい．これは言うなれば，特異点をもたない曲面を投影したとき，悪い方向から見たらどの様に悪く見えるかと言う研究で，悪さの条件を具体的に記述したという点で非常に興味深い．特異点論の視点がなければ到底できない研究であったと考えている．

S. Honda, Versality of central projections of regular surfaces, Topology and its application 313 (2020), 1—28.

多項式写像の特異性を記述するという問題については，多項式写像の非固有点の軌跡をニュートン図形を用いて具体的記述をすることに成功した．研究代表者と土屋健希氏との共同研究であり，その成果は次の論文として発表されている．

T.Fukui and T.Tsuchiya, Properness of polynomial maps with Newton polyhedron, Arnold Math J (2022)

この論文では多項式写像のニュートン図形を考え，面関数が非退化と言う概念を導入した．これは Kouchinirtenko が論文

A.G. Kouchnirenko, Polyèdres de Newton et nombres de Milnor. Inventiones mathematicae (1976) Volume: 32, page 1-32

で導入した非退化性とはだいぶ異なる．以下，$\mathbb{C}^n$ から $\mathbb{C}^n$ への多項式写像について粗い説明をする．そのような多項式写像のニュートン図形とは，各成分多項式のニュートン図形の組のことであり，その面とは各ニュートン図形の面の組である．

一般性を失うこと無しに，各成分多項式はゼロでない定数項を持つと仮定することができるので，その仮定のもと，それらの面を原点を含むものと含まないものに分ける．この時，後者に対応する面関数の零点集合が非特異軌跡を稠密に含むというのが，我々が提出した非退化性の条件である．この条件下で，ニュートン図形の各面に対し，これらの零点集合を前者の面関数の定める多項式写像で写した像の和集合が非固有点軌跡になることを，示すことができた．非固有点軌跡は Z. Jelonek が長らく研究していて，非固有点軌跡は単線職的であることや，その次数の評価などが有名であるが，我々の定理は多くの場合非固有点軌跡の線職性を具体的に示したことになり，より精密な解析をしていると評価できる．

5．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計2件（うち査読付論文　2件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　0件）

1．著者名 Toshizumi Fukui	4．巻 57
2．論文標題 Local differential geometry of cuspidal edge and swallowtail	5．発行年 2020年
3．雑誌名 Osaka J. Math.	6．最初と最後の頁 961-992.
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 Fukui Toshizumi、Tsuchiya Takeki	4．巻 -
2．論文標題 Properness of Polynomial Maps with Newton Polyhedra	5．発行年 2022年
3．雑誌名 Arnold Mathematical Journal	6．最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s40598-022-00205-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

〔学会発表〕　計3件（うち招待講演　3件／うち国際学会　3件）

1．発表者名 Toshizumi Fukui
2．発表標題 On bifurcation model for several nonlinear problems
3．学会等名 Real and complex singularities in Cargese（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2019年

1．発表者名 Toshizumi Fukui
2．発表標題 Local differential geometry of cuspidal edge and swallowtail
3．学会等名 6th International work- shop on Singularities in generic geometry and its application, University of Valencia,（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2019年

１．発表者名 Toshizumi Fukui
２．発表標題 A bifurcation model for nonlinear equations
３．学会等名 Classification problems in singularity theory and their applications RIMS-Sing 4 Workshop（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2022年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計1件

国際研究集会	開催年
Hyperplane arrangement and the 8th Japanese-Australian Workshop on Real and Complex Singularities, University of Tokyo	2019年～2019年

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関