

令和 6 年 6 月 14 日現在

機関番号：14501

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2019～2023

課題番号：19K03492

研究課題名（和文）図式的アプローチによる結び目の研究

研究課題名（英文）Study on knots by diagrammatic approach

研究代表者

中西 康剛（Nakanishi, Yasutaka）

神戸大学・理学研究科・名誉教授

研究者番号：70183514

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,400,000円

研究成果の概要（和文）：結び目の構造と不変量を局所変形を通じて明らかにし、その発展として、結び目空間の組み合わせ構造を不変量と局所変形の観点から究明することを目的としている。仮想結び目の基本的不変量である writhe polynomial に対応する局所変形を発見した。この成果を深く考察することにより、新しい仮想結び目の不変量 intersection polynomials を発見し、その特徴を研究した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

研究成果により結び目理論における新たな知見を与えることができた。この成果は結び目理論を通じて、位相幾何学ならびに数学の発展に寄与するものだと判断する。また、結び目の局所変形を通じて、DNA 結び目や高分子結び目の研究にも応用されることを期待している。

研究成果の概要（英文）：We have studied structures and invariants of knots by local moves to research the structure of knot space. We give a local move corresponding to writhe polynomial, which is a fundamental invariant of virtual knots. By considering this result, we give intersection polynomials, which are new invariants of virtual knots. Furthermore, we have studied their characters.

研究分野：位相幾何学

キーワード：結び目 図式的アプローチ 局所変形

様式 C - 19、F - 19 - 1 (共通)

1. 研究開始当初の背景

結び目は、素朴であるがとても豊かな構造をもつ対象であり、このことが広範な学問領域で研究されることになっている。研究代表者は局所変形による結び目の構造と不変量の研究を提唱し実践してきている。たとえば、研究代表者と村上斉の研究成果に、Delta move と絡み数の構造の密接な関係がある。2 つの絡み目の対応する成分間の絡み数が一致することと、Delta moves の有限列で 2 つの絡み目に移りあうことは必要十分条件である。このことなどから、局所変形と結び目の構造の対応が積極的に研究されるようになった。また、新たな不変量の開発において、ある局所変形で不変であれば、対応する構造以上の情報がその不変量には含まれないことが容易にわかる。このことなどから、結び目の構造と不変量の研究において、局所変形によるアプローチは有効であると認識されている。また、遺伝子の研究において、DNA 結び目の研究が行われているが、DNA 結び目の生成は酵素による交差交換や sharp move などの局所変形によるものであると近年の研究でわかっている。酵素の働きによる DNA 結び目の生成過程の究明も可能になる。このように、遺伝子の研究への局所変形の研究の応用が見込まれる。高分子化学への応用も見込まれる。

2. 研究の目的

本研究の目的は、結び目の構造と不変量を局所変形を通じて明らかにし、その発展として、結び目空間の組み合わせ的構造を不変量と局所変形の観点から究明することを研究目的とする。具体的には、局所変形により、結び目の構造が変化するか保持されるのか、を解析し、その不変量への影響を調べることにより、結び目の構造と不変量の関係を明らかにする。

このアプローチにより従来の不変量ではとらえられなかった評価も可能になっている。例えば、同じ結び目加群をもつが、交差交換 1 回で得られる結び目の結び目加群の集合が一致しない例がある。結び目空間が結び目加群の観点から均質でないことがわかる。このように密接であると考えられてきたにも関わらず均質でない構造を与える局所変形と不変量の例は、研究代表者により、近年発見されたばかりである。これを受けて、結び目空間の均質性と障害についての研究は始まった。交差交換と結び目加群については、結び目解消数が 1 という条件を加えると障害がなくなる。障害がなくなるための必要十分条件がわかれば、結び目空間の組み合わせ的構造の研究が進む。他の局所変形と不変量の組み合わせにおいても、結び目空間と均質性と障害について研究を進めていきたい。

3. 研究の方法

結び目理論・低次元多様体論の研究者としては、不変量の幾何学的な意味合いや特徴づけ、結び目や低次元多様体の豊富で奥深い構造のどの側面が反映されているのかの究明に最大の関心を払いたい。研究代表者は一般化した結び目解消操作を提案し、多くの有意義な局所変形を発見してきた。一般化した結び目解消操作を含む局所変形による解析について、研究代表者は研究を続けてきている。現在の結び目理論や低次元多様体論の研究には様々な分野の手法が応用されており、上記の目的を達成するためには、結び目や低次元多様体の多岐にわたる話題に精通している研究者との交流は不可欠である。研究が当初計画通りに進まないときでも、関連する研究者の意見や助言を得ることにより、軌道修正することが可能になる。必要に応じて、研究分担者や研究協力者を追加する。こうした措置で研究を力強く進めていく。こうした交流を実現するために、結び目と局所変形に関する研究集会を神戸付近で開催する。結び目理論の研究者ばかりでなく、関連する諸分野の研究者にも講演を依頼する。講演者の成果発表のみならず、参加者の研究途上の情報収集を図り、将来の方向性に関する議論を深める機会にする。研究集会以外にも研究交流は重要である。日頃の連絡などはインターネット経由でも大丈夫であるが、詳細に検討すべき時などは実際に会って議論を交わすことが必要になる。研究上重要な関連のある研究をしている研究者のいる大学に赴いて研究打ち合わせをする計画である。研究交流と成果発表に国内旅費及び外国旅費を用いる。図書文献の収集のために図書費を用いる。また、パソコンの購入等に設備備品費を用いる。具体的な研究課題は、局所変形の開発、不変量の究明、仮想結び目への応用、彩色数への応用が挙げられる。

- (1) 局所変形の開発: 本研究のコアで、新しい局所変形の発見、局所変形でうつりあう結び目に共通する結び目の構造を究明する。局所変形の間関係性、例えば強弱、について研究する。

- (2) 不変量の究明: 結び目理論の中心的課題のひとつであり, 多様な結び目不変量のそれぞれに対応する結び目の構造を研究する。また, 結び目の構造を反映する不変量の発見を試みる。
- (3) 仮想結び目への応用: 仮想結び目について, 局所変形の発見及び応用を研究する。また, 仮想結び目の不変量の開発と反映される構造を研究する。
- (4) 彩色数への応用: 彩色数について, 局所変形の発見及び応用を研究する。また, 結び目の不変量の開発と反映される構造を研究する。

4. 研究成果

(1) 仮想結び目の基本的な不変量である writhe polynomial と対応する局所変形を発見し, shell move と名付けた。つまり, 2 つの仮想結び目が同じ writhe polynomial をもつことと shell moves の有限列で移り合うことが必要十分条件である。ここで得られた writhe polynomial と shell move の対応の発見は大きい。この shell move は, 仮想結び目のガウス図式における局所変形と見ると理解がしやすい。その上で, この局所変形に対応する 2 成分絡み目の不変量を究明した。2 成分絡み目に拡張することにより, この不変量の幾何学的意味合いの理解が深まった。中村拓司, 佐藤進との共同研究による成果である。この成果は研究集会で報告し, 学術雑誌に掲載されている。

(2) 仮想結び目の被覆に関する研究である。ガウス図式において, 自然数 r の倍数のコードを除くことで仮想結び目の r -被覆が得られる。被覆は仮想結び目の幾何的不変量である。任意有限個の仮想結び目の組に対して, それらを被覆とするような仮想結び目を構成することに成功した。仮想結び目のガウス図式によるアプローチで解決した。この成果により, 仮想結び目の被覆に関する新たな知見が得られ, 被覆の持つ性質が深く認識できるようになった。中村拓司, 佐藤進との共同研究による成果である。この成果は研究集会で報告し, 学術雑誌に掲載されている。

(3) 仮想結び目の不変量に関する研究である。仮想結び目の基本的な不変量である writhe polynomial に対して観点を変え深く考察することにより新しい多項式不変量が 3 種類得られ, first, second, third intersection polynomials と命名した。検討の結果, 4 つに分割して論文作成することにした。比嘉隆二, 中村拓司, 佐藤進との共同研究による成果である。この成果は研究集会で報告し, 初めの 3 編は学術雑誌に掲載されている。残る 1 編は投稿中である。最初の 1 編はこの intersection polynomials の定義と計算方法を与えた。実交点数が 4 以下の仮想結び目について, intersection polynomials の表を与えた。3 つの多項式不変量は独立であることを示した。対称性に対する振る舞いを調べた。実交点数や仮想交点数の評価を与えることに成功した。

(4) 2 編目は連結和に関する振る舞いを研究し, 公式を与えた。古典的結び目においては, 自明な結び目の連結和は必ず自明になるが, 仮想結び目においてはそうでないことを示した。実際のところ, 自明な仮想結び目の連結和で無限に多くの自明でない仮想結び目が得られることを示した。もちろんより一般的に, 仮想結び目の連結和で無限に多くの仮想結び目が得られる。これらが異なることの証明に intersection polynomials を用いた。

(5) 3 編目は多項式の必要十分条件を与えた。仮想結び目の多項式不変量 intersection polynomials がどのような特徴を持った多項式であるかを研究し, その特徴が必要十分条件であることを示した。また, 自明な仮想結び目で得られる仮想結び目の intersection polynomials の特徴づけにも成功した。

(6) 残る 1 編ではこれらの多項式不変量の組み合わせで交差交換で不変な不変量を与えた。このことにより, supporting genus が 1 以下の仮想結び目の条件を与えることに成功した。そして, 実交点数 4 以下の平坦仮想結び目の完全な分類を与えた。また, 交差交換に関する有限形不変量として order 2 であることを示した。

(7) 3 次元球面を 4 次元球体の境界として, 境界内の結び目や絡み目が球体内で円板を貼るときに slice という。どんな条件があれば slice であるかは昔からの課題のひとつである。結び目の重要な類である pretzel knots については先行研究があった。絡み目の重要な類である pretzel links がいつ slice になるかについて本論文では研究した。先行研究とは異なる手法を用いて必要条件と十分条件を与えることに成功した。残された部分についてはこれからの研究の目標になると思われる。澁谷哲夫, 塚本達也との共同研究である。研究集会で報告し, 学術雑誌に掲載されている。

そのほか、学術雑誌に投稿中あるいは投稿準備中のものとして次のものがある。

(8) 結び目の Conway polynomial が pass-move による変形でどのような振る舞いをするか研究した。この研究を通じて、未解決であった pass-move 1 回で解ける結び目の Conway polynomial の特徴づけを与えることに成功した。また、triple-crossing change という新しい局所変形を導入し、pass-move, sharp-move, 4-move などとの関係性を究明した。高木駿希との共同研究による成果である。研究集会で報告し、論文作成中である。

(9) tangle および braid における Fox coloring に関して、必要十分条件を与えた。tangle が与えられたとき、どのような Fox coloring が可能であるかは研究されてきている。特に、境界に現れる colors に注目する。逆問題として、境界に colors を指定したときにそれを Fox coloring とするような tangle が存在するかどうかについて、本論文では研究した。また、上端と下端の colors を指定したときにそれを Fox coloring とするような braid が存在するかどうか、を考えて、必要十分条件を与えた。中村拓司、佐藤進、和田康載との共同研究による成果である。研究集会で報告し、論文作成中である。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 6件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Nakamura Takuji, Nakanishi Yasutaka, Satoh Shin	4. 巻 84
2. 論文標題 Writhe polynomials and shell moves for virtual knots and links	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 European Journal of Combinatorics	6. 最初と最後の頁 103033
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.ejc.2019.103033	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Nakamura Takuji, Nakanishi Yasutaka, Satoh Shin	4. 巻 29
2. 論文標題 A note on coverings of virtual knots	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Knot Theory and Its Ramifications	6. 最初と最後の頁 197100202
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/S0218216519710020	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Higa Rayuji, Nakamura Takuji, Nakanishi Yasutaka, Satoh Shin	4. 巻 72
2. 論文標題 The intersection polynomials of a virtual knot I: Definitions and calculations	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Indiana University Mathematics Journal	6. 最初と最後の頁 2369 ~ 2401
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1512/iumj.2023.72.9599	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Higa Ryuji, Nakamura Takuji, Nakanishi Yasutaka, Satoh Shin	4. 巻 32
2. 論文標題 The intersection polynomials of a virtual knot II: Connected sums	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Journal of Knot Theory and Its Ramifications	6. 最初と最後の頁 2350067
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/S0218216523500670	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Higa Ryuji, Nakamura Takuji, Nakanishi Yasutaka, Satoh Shin	4. 巻 61
2. 論文標題 The intersection polynomials of a virtual knot III: Characterization	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Osaka Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 229-245
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.18910/95620	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Nakanishi Yasutaka, Shibuya Tetsuo, Tsukamoto Tatsuya	4. 巻 32
2. 論文標題 On pretzel links which are concordant to the trivial link	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Journal of Knot Theory and Its Ramifications	6. 最初と最後の頁 2350083
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/S0218216523500839	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計7件 (うち招待講演 5件 / うち国際学会 2件)

1. 発表者名 Yasutaka Nakanishi
2. 発表標題 A note on sharp move
3. 学会等名 International Workshop "Knots in Tsushima 2019" (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 中西康剛
2. 発表標題 Alexander polynomials and crossing changes
3. 学会等名 2019 琉球結び目セミナー (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Yasutaka Nakanishi
2. 発表標題 The intersection polynomials of a virtual knot
3. 学会等名 12-th TAPU-KOOK Joint Seminar on Knots and Related Topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Yasutaka Nakanishi
2. 発表標題 Remarks on local moves
3. 学会等名 研究集会「結び目理論」(招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 中西康剛, 高木駿希
2. 発表標題 The differences of Conway polynomials for knots caused by a single pass move
3. 学会等名 日本数学会トポロジー分科会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 中西康剛, 高木駿希
2. 発表標題 The differences of Conway polynomials for knots caused by a single pass move
3. 学会等名 研究集会「拡大KOOKセミナー2022」(招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 中西康剛、佐藤進
2. 発表標題 Colors of virtual tangles
3. 学会等名 日本数学会トポロジー分科会
4. 発表年 2023年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------