様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　６ 年　 ５ 月 ２７ 日現在

機関番号：３２６１２
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2019～2023
課題番号：１９Ｋ０３４９９

研究課題名（和文）多面体による写像の特異点および多様体の幾何構造の研究

研究課題名（英文）Study of geometric structures of singularities and manifolds based on polyhedra

研究代表者
石川　昌治（ISHIKAWA, Masaharu）

慶應義塾大学・経済学部（日吉）・教授

研究者番号：１０３６１７８４

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,300,000円

研究成果の概要（和文）：フロースパイン、シャドウなどの２次元多面体を利用して、３次元多様体、４次元多様体、および平面曲線の研究を行った。フロースパインは３次元多様体上の接触構造と、シャドウは代数曲線や直線配置と関連する研究対象である。平面曲線特異点を摂動して得られる平面上の実曲線を２重化してシャドウ表示を構成することで、補空間の基本群の表示が得られることを示した。これは結び目補空間の基本群のWirtinger表示の一般化となっている。フロースパインと接触構造の研究においては、特にabaloneに着目し、ザイフェルト束との横断性について研究を行った。また、無限遠の特異点や４次元球面への円作用の研究を進めた。

研究成果の学術的意義や社会的意義
多様体および多様体間の写像は数学のみならず自然科学全般において重要な道具であり、そこに現れる特異点も重要な研究対象である。これらの情報を表すためにグラフや実平面曲線が用いられることが多いが、より複雑な研究を行う場合には、２次元多面体を用いる必要がある。それがスパインであり、シャドウである。本研究では、接触構造や代数曲線といった幾何構造を多面体を用いて表示し、そこから得られる情報により多様体や多様体間の写像の情報を得るという枠組みを構築している。これらの結果は、３次元多様体と４次元多様体、さらに高次元の多様体を結び付ける研究の基礎として、今後、重要な役割を果たすものである。

研究成果の概要（英文）：We studied 3- and 4-dimensional manifolds and singular plane curves by using 2-dimensional polyhedra such as flow spines and shadows. Flow spines are related to contact structures on 3-dimensional manifolds, and shadows are related to plane curves and line arrangements. We showed that a presentation of the fundamental group of a plane curve singularity can be obtained from a real morsification of the singularity by doubling the real curve on the 2-dimensional plane and making it to be a shadow in a suitable way. This is a generalization of the Wirtinger presentation of the fundamental group of a knot complement. In the study of flow spines and contact structures, we focused on the abalone and studied its transversality with Seifert fibrations. We also studied atypical fibers of polynomial maps, called singularities at infinity, and circle actions on the 4-dimensional sphere.

研究分野：幾何学

キーワード：特異点　多様体　３次元多様体　４次元多様体　無限遠の特異点

１．研究開始当初の背景

多様体間の写像は数学の諸分野のみならず自然科学全般で扱われる重要な道具であり、その特異点を深く理解することは重要な研究課題である。Le，Neumann，Rudolph らによるミルナーファイバーのスパインによる記述、レフシェッツ束のハンドル分解、安定写像のスタイン分解など、写像の特異点の研究において多面体は多くの場面で用いられている。多様体間の写像により現象を理解するためには、その特異点での性質を深く知る必要がある。複素解析的写像の特異点の研究においては、1960 年代に Milnor がミルナー束を導入し、研究が飛躍的に進んだ。ここでミルナー束とは、特異点を中心とする十分小さい球面上にできる円上のファイバー束である。複素特異点の研究ではこのファイバー束により具体的な考察が可能となり、様々な良い性質をもつことが知られるようになった。一方，実特異点の研究では、同時期に Whitney，Thom，Mather らにより写像の安定性の観点から研究が進められた。写像の空間内で写像を少し動かしても性質が変化しないとき、その写像は安定であるという。安定写像の研究は安定写像の存在、特異点の分類などを中心に研究が進められた。特異点の構造を深く研究する手法としては特異点解消など様々な方法があるが、変換等のフィルターをかけずに特異点の情報を直接読み取るには、特異点のリンク、ミルナーファイバーの埋め込み、そしてミルナー束のモノドロミーの把握が不可欠となる。複素特異点の場合はレフシェッツ束へのモース化によるモノドロミーの分解を与えることでモノドロミーを記述できる。特に平面曲線特異点の場合は A’Campo と Gusein-Zade による実モース化により、モノドロミーを詳細に記述することが可能となる。A’Campo はさらにディバイドという概念を導入し、特異点のリンクや消滅サイクルの位置をより具体的に記述することに成功している。さらに最近の結果として、研究代表者と直江央寛氏は Turaev のシャドウによるディバイドのレフシェッツ束の表示を与えた。これによりミルナーファイバーの埋め込みの位置を詳細に記述することが可能となった。

実特異点の研究においては、安定写像への変形により写像の構造を把握することが研究の主流となる。近年では broken レフシェッツ束やトライセクションなど、この視点から多くの研究が進められている。Turaev のシャドウは３次元多様体から２次元多様体への安定写像のスタイン分解に対応することが Costantino と D.Thurston の論文において示唆され、この枠組みは研究代表者と古宇田悠哉氏により定式化されている。

２．研究の目的

本研究の目的は、多面体の構造を用いて、特異点および多様体の幾何構造を詳細に把握することである。特に４次元多様体に着目すると、多面体にはレフシェッツ束を経由してシンプレクティック構造を乗せることができ、さらに境界に現れるオープンブック分解では接触構造の研究に繋げることができる。３次元多様体の接触構造に対しては、フロースパインという多面体が有効であることが研究代表者らの最近の研究で確認できており、これらの多面体の情報を融合することで、ファイバー束とその境界の幾何構造の研究に対し、多面体を使った新しい枠組みが定式化できると考えている。

２．研究の方法

まず、シャドウ補空間の位相型についての研究を進める。特に、補空間の基本群の研究を行う。先行研究により平面曲線特異点のミルナー束のシャドウ表示が得られている。シャドウ補空間の基本群の研究は特異点のリンク補空間の基本群の研究や、複素化された実直線配置の補空間の基本群の研究を含む。特異点の消滅サイクルはホモロジーサイクルとして定式化されることが一般的であるが、シャドウを利用することで、消滅サイクルに対応するハンドル貼り付けの位置を表すループを基本群の元として捉えることができ、より詳細な情報を得ることが可能となる。

フロースパインと接触構造の研究については、先行研究において、接触構造の Reeb ベクトル場をフロースパインのフローとみなすことにより接触構造の接触同相類とフロースパインを対応させることで、２つの間に１対１対応が成り立つことが示されている。本研究ではこの結果をさらに精査すると同時に、abalone などの具体的なフロースパインに対して、どのような Reeb ベクトル場が対応できるかなど、対応についてのより詳細な研究を進める。

写像の大域的な研究として、無限遠の特異点の研究を進める。Atypical ファイバーとよばれる無限遠に特異点をもつファイバーの位相的な特徴付けを、グラフや多面体などの組合わせ的な情報を使って記述することを試みる。また、高次元への研究としては、高次元球面上の円作用により不変な結び目の分類を進める。３次元球面上の円作用によって不変な結び目はトーラス結び目と呼ばれる特異点のリンクであり、高次元球面において同様のクラスを明確にすることで、これまでの研究の高次元への一般化の足掛かりとする。

４．研究成果

(1) シャドウ補空間の位相型についての研究

シャドウとは３次元多様体および４次元多様体を多面体により表示する手法であり、量子不変量の研究において Turaev により導入された。平面曲線特異点の実モース化の一般化として A'Campo により導入されたディバイドは、特異点をもつ平面曲線の大域的な研究を進める上での理解を進めやすい研究対象である。特に、実直線配置の複素化を含むので、その研究にも応用できる。本研究では古宇田悠哉氏、直江央寛氏との共同研究として、ディバイドが表す代数曲線の補空間の基本群の研究を行った。ディバイドを２重化してシャドウ表示を構成し、その図式上で、シャドウの特異集合の辺と領域に基本群の生成元を割り振る。関係式は特異集合の辺および領域から得られる。このようにして得られる基本群の表示は、結び目補空間の基本群の Wirtinger 表示の類似であり、実際、シャドウのグリームが特別な場合には、Wirtinger 表示そのものになることが証明できる。表示自体はまだ繁雑ではあるが、平面曲線補空間の基本群の新しい計算方法を提示しており、意味のある結果が得られている。

(2) フロースパインと接触構造の対応の研究

低次元トポロジーの視点からの研究として、３次元多様体のフロースパインと接触構造に関する研究を行った。石井一平氏、古宇田悠哉氏、直江央寛氏との共同研究であるフロースパインと接触構造の１対１対応の研究について、研究結果の精査を行った。特に、abalone に対応する接触構造の具体的構成について考察を進めた。また、フロースパインとフローの力学系の研究の準備として、abalone とホップ束との関係についての研究を行い、ホップ束に対して横断的な位置に abalone を置くことができないことを証明した。この議論はザイフェルト束に一般化することができ，(n,1)のザイフェルト束に対して abalone を横断的に置くことができないこと、および、$1/2<p/q<1$ を満たす任意の(p,q)について，(p,q)のザイフェルト束に対して abalone を横断的に置くことができることを証明した。フロースパインの研究では、スパインを固定した上で、それに対応するフローのホモトピー類の研究を行うことが多いが、フローの研究という意味では、今回のように先にフローを固定して、対応するフロースパインの研究を行うことが望ましい。その意味で、対応するフロースパインの位置に繊細な制限が加わるという事実が得られたことは、新しい進展と言える。

(3) 結び目補空間の本質的曲面の boundary slope の研究

下川航也氏、Thomas Mattman 氏らとの共同研究として、結び目補空間の本質的曲面の boundary slope の研究を行い、boundary slope と結び目の交点数との比が無限に発散する交代結び目の列が存在することを示した。この結果はモンテシノス結び目のような形のよい結び目からは得られない結果であり、より一般の結び目での現象を把握する上で重要な結果といえる。

(4) 多項式写像の無限遠の特異点の研究

Nguyen Tat Thang 氏と、多項式写像の無限遠の特異点の研究として、atypical ファイバー近傍での対のホモトピー群による特徴付けを行った。Atypical ファイバーとは局所自明束にならないファイバーのことを指す。多項式写像による atypical ファイバーの像全体の集合は bifurcation set と呼ばれる。この集合は代数的集合となる。Bifurcation set に滑層構造を与え、その stratum 上に弧を選び、多項式写像をその弧の逆像に制限する。この制限された多項式写像に対して対のホモトピー群を考察することで、多項式写像がある値の近傍で Serre ファイバー束であることと、多項式写像が各弧の上で Serre ファイバー束であることが同値であることを示した。

(5) 球面上の円作用により不変となる結び目の研究

４次元球面上の円作用により不変な２次元結び目は branched twist spin と呼ばれる。３次元球面内の結び目 K と互いに素な整数(m,n)に対して、branched twist spin $K^{m,n}$が定まる。(m,n)=(0,1)のときはスパン結び目、(m,n)=(m,1)のときはツイストスパン結び目として知られている。Branched twist spin 補空間の基本群の表示は Plotnick により知られており、福田瑞季氏により基本群の表現による研究が行われている。本研究では福田氏との共同研究として、branched twist spin 補空間の基本群を精査することで、branched twist spin の分類を進めた。Branched twist spin 補空間の基本群をその中心で割った商群を考えると、結び目 K がトーラス結び目以外の場合には、商群は軌道体群(orbifold group)であることが分かり、ほとんどの場合において、同型ではない K に対しては、それらの branched twist spin も同型ではないことを示した。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計8件（うち査読付論文　5件／うち国際共著　1件／うちオープンアクセス　0件）

1．著者名 Ippei Ishii, Masaharu Ishikawa, Yuya Koda, Hironobu Naoe	4．巻 -
2．論文標題 Positive flow-spines and contact 3-manifolds, II	5．発行年 2023年
3．雑誌名 Annali di Matematica Pura ed Applicata (1923 -)	6．最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 Masaharu Ishikawa, Yuya Koda, Hironobu Naoe	4．巻 -
2．論文標題 Presentation of the fundamental groups of complements of shadows	5．発行年 2023年
3．雑誌名 Essays in Geometry Dedicated to Norbert A’Campo (ed. A. Papadopoulos), European Mathematical Society Press	6．最初と最後の頁 557-588
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 Ippei Ishii, Masaharu Ishikawa, Yuya Koda, Hironobu Naoe	4．巻 202
2．論文標題 Positive flow-spines and contact 3-manifolds	5．発行年 2023年
3．雑誌名 Annali di Matematica Pura ed Applicata (1923 -)	6．最初と最後の頁 2091-2126
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s10231-023-01314-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 Masaharu Ishikawa, Thomas W. Mattman, Kazuya Namiki, Koya Shimokawa	4．巻 760
2．論文標題 Alternating knots with large boundary slope diameter	5．発行年 2020年
3．雑誌名 Contemporary Mathematics	6．最初と最後の頁 207-216
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1090/conm/760/15292	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕　計14件（うち招待講演　9件／うち国際学会　6件）

1．発表者名
石川昌治

2．発表標題
Circle actions on the 4-sphere and 3-orbifold groups

3．学会等名
International Conference "Singularities and Algebraic Geometry"（招待講演）（国際学会）

4．発表年
2024年

1．発表者名
石川昌治

2．発表標題
On the fundamental groups of branched twist spins

3．学会等名
Breadth in low-dimensional topology（招待講演）（国際学会）

4．発表年
2023年

1．発表者名
石川昌治

2．発表標題
Stable map complexity and hyperbolic volumes of 3-manifolds

3．学会等名
Boston University / Keio University / Tsinghua University Workshop 2021（招待講演）（国際学会）

4．発表年
2021年

1．発表者名
石川昌治

2．発表標題
Polyhedral presentation of Milnor fibers

3．学会等名
Seminar in Institute of Mathematics, VAST（招待講演）（国際学会）

4．発表年
2019年

１．発表者名 石川昌治
２．発表標題 Complexity of contact 3-manifolds
３．学会等名 Hyperplane arrangements and Japanese-Australian Workshop on Real and Complex Singularities（国際学会）
４．発表年 2019年

〔図書〕　計1件

１．著者名 Masaharu Ishikawa, Shoji Yokura (Editors-in-Chief)	４．発行年 2020年
２．出版社 World Scientific Publishing	５．総ページ数 397
３．書名 Singularities — Kagoshima 2017, Proceedings of the 5th Franco- Japanese-Vietnamese Symposium on Singularities	

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計2件

国際研究集会 Workshop "Topology of Singularities and Related Topics"	開催年 2023年～2023年
国際研究集会 Mini-Workshop on Knots and Manifolds	開催年 2024年～2024年

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
ベトナム	Institute of Mathematics, VAST			