

令和 4 年 9 月 4 日現在

機関番号：32682

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2019～2021

課題番号：19K03504

研究課題名(和文)算術的準結晶の幾何学

研究課題名(英文)Geometry of arithmetic quasicrystals

研究代表者

砂田 利一 (Sunada, Toshikazu)

明治大学・研究・知財戦略機構(中野)・研究推進員

研究者番号：20022741

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,200,000円

研究成果の概要(和文)：2年以上、難病指定の病気と腎臓の疾患のため体調を崩し、入退院を何度も繰り返していた。従って研究は思うように進まず、さらに新型コロナ蔓延のため、外出もできずにいた。科研費支給額の相当部分を未使用なのはこのためである。このような理由から実績の概要を述べるまでに至っていない。しかし、ユークリッド空間内の離散集合の研究は、ある程度の結果を得ている。興味ある対象は、「算術的」に定義された離散集合であり、その典型的例としてアイゼンシュタイン数に関連する離散集合がこれまでの研究対象であった。その分布について、一般化されたリーマン和の観点から知見を得ている。さらに、非周期的結晶構造の例としても興味深い。

研究成果の学術的意義や社会的意義

純粋数学のみならず、結晶構造の理論を通して物質科学の分野にも大きな意義を有している。病気のため、完成には至らなかったが、拙著の増補版を通して、広く数理科学の発展に貢献している。

研究成果の概要(英文)：For more than two years, I was significantly ill due to an intractable disease (a type of vasculitis) and a kidney disease, and he was repeatedly hospitalized and discharged. Therefore, my research did not proceed as expected, and he could not go out due to the spread of the new corona. This is why I have not used a significant portion of his Grants-in-Aid for Scientific Research.

For this reason, unfortunately, I have not yet provided an overview of our achievements. However, studies of discrete sets in Euclidean space have yielded some results. The most interesting subject is the discrete set defined "arithmetically". The discrete set related to the Eisenstein number as an typical example has been the subject of research so far. I have obtained knowledge about the distribution from the viewpoint of generalized Riemann sum. It is also interesting as an example of aperiodic crystal composition. If I feel better, I will continue my research in this direction.

研究分野：Geometry

キーワード：離散集合 非周期的結晶構造 アイゼンシュタイン数

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1 . 研究開始当初の背景

The Russian mathematician P.L. Chebyshev (1815--1897) once said in a general context that the collaboration of theory and practice brings out the most beneficial results in the sciences. N.I. Lobachevskii (1792--1856), one of the discoverers of non-Euclidean geometry, also said, "There is no area of mathematics, however abstract, which may not someday be applied to phenomena of the real world." Their statements pertain to what this work intends to convey to the reader; that is, the author wishes primarily to provide the reader with mathematical insight into modern crystallography, a typical practical science that originated in classifying of the observed shapes of crystals. However the tools we shall employ are not adopted from the traditional theory of crystallographic groups, but rather from algebraic topology, a field in pure mathematics cultivated during the first half of the last century. More specifically, the elementary theory of covering spaces and homology is effectively used in the study of 3D networks associated with crystals. This explains the reason why this research is entitled Topological Crystallography.

2 . 研究の目的

We formulate a minimum principle for crystals in the framework of discrete geometric analysis, which provides us with the concept of standard realizations, a canonical way proposed by the author and his collaborator Motoko Kotani in 2000 to place a given crystal structure in space so as to produce the most symmetric microscopic shape. In spite of its purely mathematical nature (thus having nothing to do with physical and chemical aspects of crystals), this concept, combined with homology theory, turns out to fit with a systematic design and enumeration of crystal structures, an area of considerable scientific interest for many years. Incidentally, crystallographers proposed a similar concept in their recent studies to determine the ideal symmetry of a crystal net and to analyze its topological structure.

3 . 研究の方法

The objects in topological crystallography are not necessarily restricted to structures of atomic scale, visible only through special devices. Ornamental patterns having crystallographic symmetry in art, nature, and architectures also fall within the scope of this research. Indeed, many interesting forms (*katashi* in Japanese) that are potentially useful for artistic designs in various areas can be generated from standard realizations.

4 . 研究成果

Standard realizations show up in the asymptotic behaviors of random walks on topological crystals, the abstraction of crystal structures, and are closely related to a discrete analogue of Abel--Jacobi maps in algebraic geometry. These remarkable aspects of standard realizations, indicate that topological crystallography is neither an outdated nor isolated field in mathematics; it vigorously interacts with other areas in pure mathematics which have been intensively developed in the last decade. Thus this research, though devoted to a single application of mathematics, takes the reader to various mathematical fields.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件 / うち国際共著 1件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Toshikazu Sunada	4. 巻 68
2. 論文標題 Coincidence or Destiny	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Notices of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 81-93
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/noti2208	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Toshikazu Sunada	4. 巻 無し
2. 論文標題 From Riemann to Euclid and beyond	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Geometry in History, Springer	6. 最初と最後の頁 213-304
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計2件（うち招待講演 1件 / うち国際学会 0件）

1. 発表者名 砂田利一
2. 発表標題 Diamond twin revisited
3. 学会等名 日本数学会 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 砂田利一
2. 発表標題 算術的離散集合の点の分布とその数論的な応用
3. 学会等名 日本数学会
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------