様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　５ 年　６ 月 １５ 日現在

機関番号：３７１１５
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2019～2022
課題番号：１９Ｋ０３５０７

研究課題名（和文）離散曲線と離散曲面の構成

研究課題名（英文）Construction of discrete curves and discrete surfaces

研究代表者
松浦　望（Matsuura, Nozomu）

久留米工業大学・工学部・教授

研究者番号：００３８９３３９

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,300,000円

研究成果の概要（和文）：離散可積分幾何の観点から3次元ユークリッド空間内の離散キルヒホフ弾性棒の明示公式を導出した。なおこの明示公式は特別な場合として2次元ユークリッド平面内の離散弾性曲線（離散化されたオイラーのエラスティカ）の明示公式を含んでいる。また可積分幾何の観点から4次元ユークリッド空間内のジェネリック共形平坦超曲面の曲率曲面の具体例を構成しその大域的性質を調べた。

研究成果の学術的意義や社会的意義
コンピュータグラフィクス分野ではしばしば一次元弾性体の数値シミュレーションが行われるが、本研究で求めた離散キルヒホフ弾性棒の明示公式は、そのような数値実験の理論的基盤としての役割を果たしうる。

研究成果の概要（英文）：From the viewpoint of discrete integrable geometry, we derived an explicit formula for the discrete Kirchhoff elastic rods in 3-dimensional Euclidean space. From the viewpoint of integrable geometry, we constructed an example of the curvature surfaces in generic conformally flat hypersurfaces in 4-dimensional Euclidean space and investigated its global behaviour.

研究分野：差分幾何

キーワード：離散Kirchhoff弾性棒　離散弾性曲線　離散単振り子方程式　共形平坦超曲面

様　式　Ｃ－１９，Ｆ－１９－１，Ｚ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

⑴ キルヒホフ弾性棒の明示公式　　ピアノ線に代表される一次元弾性体はいろいろな観点から多くの研究が行われており，数理モデルとしてはオイラーの弾性曲線とキルヒホフの弾性棒がよく知られている．弾性曲線は一次元弾性体の最も素朴なモデルであり，17世紀末にヤコブ・ベルヌーイが端緒となる問題を提起したのちに，問題を引き継いだダニエル・ベルヌーイがオイラーへの手紙の中で変分問題としての定式化を行って，最終的にはオイラーが平面内の弾性曲線の形状を分類した．弾性曲線は弾性体の太さを無視して中心線の形状のみを考えたモデルだが，それに対して弾性棒は，中心線の形状に加えて弾性体の材質の捩れまで考慮したモデルであり，特別な場合として弾性曲線を含んでいる．1980年代になるとキルヒホフ弾性棒の形状を陽的，明示的に記述することに関心がもたれ，木田重雄（DOI:10.1017/S0022112081000475）や鶴秀生(DOI:10.1143/JPSJ.56.2309)やシーとハースト（DOI:10.1063/1.468506)，あるいはランガーとシンガー（DOI:10.1112/jlms/s2-30.3.512，DOI:10.1137/S0036144593253290）らの研究により，ユークリッド空間$\mathbb{R}^3$内のキルヒホフ弾性棒の形状がヤコビの楕円関数を用いて明確に記述された．弾性曲線や弾性棒の数値計算に関しては，ヤコビの楕円関数で計算するスプライン解法(DOI:10.1137/0714017，DOI:10.1145/146847.146925）が提案されたり，弾性体のコッセラー理論に基づいた接触処理やループ現象の数値実験（DOI:10.2312/SCA/SCA07/063-072，DOI:10.1111/j.1467-8659.2008.01147.x）が行われたりしたのち，近年では中心線の伸縮を許容するような弾性棒の数値実験（DOI:10.1145/1360612.1360662，DOI:10.1145/1833349.1778853，DOI:10.1016/j.jcp.2013.06.034）が行われるなど，特にコンピュータグラフィクス分野において顕著な研究成果が得られている．その一方で，離散微分幾何（DOI:10.1090/gsm/098）の研究分野に目を向けると，非伸縮性の離散キルヒホフ弾性棒がボベンコとスリス（DOI:10.1007/s002200050642）によって定義されて以降，その形状を明示的に記述するような研究が進展しておらず，離散キルヒホフ弾性棒の明示公式の導出が研究課題となっている．

⑵ 共形平坦超曲面　　共形平坦な超曲面の研究はエリ・カルタン（DOI:10.24033/bsmf.975）に始まり，ユークリッド空間$\mathbb{R}^{n+1}$（$n \geq 4$）内の超曲面はそれがチャネル超曲面（すなわち1つの主曲率だけが異なり他の$n-1$個の主曲率は一致するような超曲面）である場合に限り共形的に平坦であることが知られている．同様に$\mathbb{R}^4$内の3次元チャネル超曲面も共形平坦であるが，3次元の場合はこのほかに，ジェネリックな（すなわち3つの異なる主曲率を持つ）共形平坦超曲面が存在し，その分類は未解決問題である．ジェネリックな3次元共形平坦超曲面の局所的な構造に関しては，いくつかの先行研究（DOI:10.2969/jmsj/07027420，DOI:10.1007/s10231-017-0665-0，Zbl:0820.53003，DOI:10.1007/s13366-014-0225-3，DOI:10.1017/S0027763000005274）があるが，特にヘルトリヒイェロミンと陶山（DOI:10.1007/978-3-319-11523-8_20)は，与えられたジェネリック共形平坦局所超曲面からこのような局所超曲面を作る方法を提供した．しかしその一方で，$\mathbb{R}^4$内に実現されたオリジナルのジェネリック共形平坦超曲面は，これまでに知られている具体例が非常に少なく，それらの具体例も局所超曲面である：実際このような超曲面をある種の性質で分類した結果（DOI:10.1142/S0129167X07004138，DOI:10.18910/10534，DOI:10.1142/S0129167X0500276X）に照らすと，積型を除いて1つのクラスしか知られていない．

２．研究の目的

本研究では，⑴ 離散微分幾何の観点から$\mathbb{R}^3$内の離散キルヒホフ弾性棒の明示公式を導出すること，および ⑵ 可積分幾何の観点から$\mathbb{R}^4$内のジェネリック共形平坦超曲面の具体例を構成しその性質を調べること，の2点を目的とする．

３．研究の方法

⑴ 離散キルヒホフ弾性棒の明示公式　　キルヒホフ弾性棒は特別な場合として弾性曲線を含んでいる．したがってキルヒホフ弾性棒の明示公式に含まれているパラメーターを特別な値に取ることによってオイラーの平面弾性曲線（いわゆるエラスティカ）が構成されるが，それとは別に，エラスティカに特化した明示公式もいくつか知られている．その中のひとつにマンフォード(DOI:10.1007/978-1-4612-2628-4_31）によって導出された，楕円テータ関数を用いた明示公式がある．楕円テータ関数は可積分系理論の研究によく登場して扱いやすい．そこで本研究では離散キルヒホフ弾性棒の明示公式を次の手順で導出する：まずマンフォードの公式を手本にして楕円テータ関数を用いて平面離散弾性曲線の明示公式を導出し（手順1)，次にそれを空間離散弾性曲線の明示公式に拡張して（手順2)，最後にそれをさらに離散キルヒホフ弾性棒の明示公式に拡張する（手順3)．手順2や手順3では，空間離散曲線（$\mathbb{R}^3$のベクトル）やそれに沿った枠場（SO(3)の行列）をどのように成分表示するかが問題となるが，本研究では空間弾性曲線が渦糸方程式の

定常解となることに注目して，離散渦糸方程式の明示公式（DOI:10.1093/integr/xyz003）で用いられた表示を利用する．

⑵ 曲率曲面の構成　$\mathbb{R}^4$内のジェネリック共形平坦局所超曲面は，3次元球面$\mathbb{S}^3$のある局所曲面から得られる．実際陶山（DOI: 10.1007/s11425-020-1761-9）は次のことを証明した：$\mathbb{S}^3$内の曲面は$\mathbb{R}^4$の枠場を引き起こし，枠場の積分面としてある曲面（以下これを曲率曲面という）が決定され，ジェネリック共形平坦超曲面は曲率曲面の発展として得られる．曲率曲面の主曲率線は超曲面の主曲率線でもある．したがって，曲率曲面を調べることは$\mathbb{R}^4$のジェネリック共形平坦超曲面の研究にとって重要であると考えられる．先行研究（DOI: 10.2969/jmsj/07027420, DOI: 10.18910/24480）によって，平面内の単連結な開集合上で定義された定ガウス曲率-1を持つ解析的な2次元計量たちの族が存在して，各2次元計量は$\mathbb{S}^3$において上述の曲面を生じさせることがわかっている．そこで本研究では，上半平面上の双曲計量を平面上の退化計量と見なし，その退化計量から生じる特異点つきの曲率曲面$f(x,y)$の大域構造を調べる．

４．研究成果

⑴ 離散キルヒホフ弾性棒の明示公式　次の成果を得た．
① 平面離散弾性曲線の明示公式；ユークリッド平面$\mathbb{R}^2$内の離散弾性曲線を楕円テータ関数によって明示的に構成した．特に平面離散弾性曲線の離散曲率（すなわち離散弾性曲線の頂点の外角を二等分して正接をとりそれをさらに頂点間距離で割ったもの）は楕円テータ関数の積の比で表されることがわかり，この表示をもとにして下述の研究③が進展した．
② 離散単振り子方程式；これは研究成果①の系である．峯崎と中村（DOI:10.1016/S0375-9601(98)00800-7）は単振り子の微分方程式をサインゴルドン方程式の簡約であると見做し，ソリトン理論における双線形化法の手法で離散化したが，本研究では平面弾性曲線と単振り子の関係（すなわち速さ1の平面弾性曲線の接ベクトルの偏角が単振り子の微分方程式にしたがって変化すること）に着目し，離散微分幾何の観点から単振り子の微分方程式を離散化した．本研究で得られた単振り子の差分方程式はいわゆる QRT 写像（DOI:10.1016/0167-2789(89)90233-9）の一例となっており，初期値問題を解くことができて，解は初速度の大きさに応じて往復運動か倒立運動か回転運動をする．これらの解は，微分方程式の場合の解と違って，どれも一般には周期的にはならないが，往復運動と回転運動の場合には差分間隔をうまくとることによって解を周期的にすることができる．
③ 離散キルヒホフ弾性棒の明示公式；川久保哲氏と共同研究を行い，ユークリッド空間内の離散キルヒホフ弾性棒がそれぞれ楕円テータ関数によって明示的に構成できることを示した．現時点では速報的な性格の論文（HNR:2433/281550）が出版済みだが，近く，より精密化したものを執筆予定である．なお研究成果①の系として研究成果②が得られたように，本研究成果③の系として，ラグランジュのコマの可積分離散モデルとその解が得られる．今後は，離散キルヒホフ弾性棒の形状の分類や，形状が簡単に制御できるような良いパラメータを探すこと，さらに伸縮性の弾性棒の離散モデルを構築することなどが研究課題となる．

⑵ 曲率曲面の構成　ユークリッド空間$\mathbb{R}^4$内のジェネリック共形平坦超曲面は局所的には曲率曲面の発展として得られるが，負の定曲率計量が曲率曲面を生じさせることに鑑み，本研究では上半平面上の双曲計量を平面上の退化計量とみなして，そこから決まる特異点つきの曲率曲面$f(x,y)$の大域構造を，陶山芳彦氏との共同研究で調べた．その結果，曲率曲面の各座標曲線の大域的な挙動が明らかになり，特に，計量が退化する点をこえて曲率曲面が解析的に延長されることがわかった．またこれらの結果を可視化するにあたり，曲率曲面の枠場を近似する差分方程式系を導出し，その収束についても議論した．以下ではこれらの主要結果をより詳しく，ただし領域$D=\{(x,y); x>0\}$上の退化計量g（これは一般化超幾何関数${}_1F_2$で記述される）に限定して述べる．まず(D,g)の特異点集合$\{(x,y);\ y(x^2-y^2)=0\}$に関しては次のことがわかった：ⓐ$y\neq 0$のとき各x曲線$f(x,y)$は$x=|y|$に(2,3,4)型のカスプを持つ．ⓑ各y曲線$f(x,y)$は$y=0$に(2,3,4)型のカスプを持つ．ⓒ曲線$f(|y|,y)$はy曲線$f(x,y)$たちの包絡線である．次に曲率曲面$f(x,y)$の無限遠点については次のことがわかった：ⓓ$f(x,y)$の各座標曲線はどれも2次元球面上にある．ⓔ$y\neq 0$のとき，x曲線$f(x,y)$は$x\to 0, x\to\infty$においてそれぞれ小円に一様収束し，これら2つの小円は互いに平行である．ⓕ$y=0$のとき，x曲線$f(x,0)$は$x\to 0$において1点に収束し，$x\to\infty$において小円に一様収束する．ⓖy曲線$f(x,y)$は$y\to\pm\infty$において同じ点に一様収束する．さらにⓔの小円の中心はすべてある平面に属し，ⓖの極限点はすべて別の平面に属して，この2つの平面は互いに直交する．曲率曲面のこのような複雑で単純な構造が，退化計量gとしてまとめられることは興味深い．また以上に述べた結果は，曲率曲面$f(x,y)$の各座標曲線が枠の線形結合として表されるという事実の帰結であり，積分することなく$f(x,y)$が得られるところがいかにも可積分幾何という感じがして面白い．本研究は曲率曲面の一例を調べるにとどまったが，今後は曲率曲面の可積分離散化や，ジェネリック共形平坦超曲面およびその双対の構成などが研究課題となる．

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計2件（うち査読付論文　2件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　1件）

１．著者名 川久保哲，松浦望	４．巻 B91
２．論文標題 離散Kirchhoff弾性棒の明示公式	５．発行年 2023年
３．雑誌名 京都大学数理解析研究所講究録別冊	６．最初と最後の頁 13--35
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

１．著者名 Shimpei Kobayashi, Nozomu Matsuura	４．巻 69
２．論文標題 Representation formula for discrete indefinite affine spheres	５．発行年 2020年
３．雑誌名 Differential Geometry and its Applications	６．最初と最後の頁 101592
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.difgeo.2020.101592	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

〔学会発表〕　計10件（うち招待講演　0件／うち国際学会　1件）

１．発表者名 陶山芳彦，松浦望
２．発表標題 Genericで共形平坦な超曲面内の曲率曲面の拡張と近似
３．学会等名 日本数学会2023年度年会
４．発表年 2023年

１．発表者名 久野叶登，松浦望
２．発表標題 単振子の離散化
３．学会等名 研究集会「非線形波動と可積分系」
４．発表年 2021年

１．発表者名
川久保哲，松浦望

２．発表標題
離散キルヒホフ弾性棒の明示公式

３．学会等名
日本応用数理学会2021年度年会

４．発表年
2021年

１．発表者名
松浦望

２．発表標題
離散キルヒホフ弾性棒の明示公式

３．学会等名
RIMS共同研究（公開型）「可積分系数理の諸相」

４．発表年
2021年

１．発表者名
松浦望

２．発表標題
離散キルヒホフ弾性棒の明示公式

３．学会等名
伊都CREST ED3GEセミナー

４．発表年
2021年

１．発表者名
松浦望

２．発表標題
平面離散弾性曲線の明示公式

３．学会等名
日本数学会2020年度年会

４．発表年
2020年

１．発表者名 松浦望
２．発表標題 平面離散弾性曲線の明示公式
３．学会等名 伊都CREST ED3GEセミナー
４．発表年 2020年

１．発表者名 松浦望
２．発表標題 離散曲面の離散曲率
３．学会等名 JST CREST「設計の新パラダイムを拓く新しい離散的な曲面の幾何学」令和元年度第1回戦略会議
４．発表年 2019年

１．発表者名 松浦望
２．発表標題 離散曲面の離散曲率
３．学会等名 伊都CREST ED3GEセミナー
４．発表年 2019年

１．発表者名 Nozomu Matsuura
２．発表標題 Discrete curve shortening flow
３．学会等名 International Congress on Industrial and Applied Mathematics（国際学会）
４．発表年 2019年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

_

6．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

7．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

8．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関