様　式　C－19、F－19－1、Z－19　(共通)

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　６ 年　６ 月　４ 日現在

機関番号：１２６０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2019～2023
課題番号：１９Ｋ０３５１２
研究課題名（和文）アフィンルート系に付随する多重超幾何級数・遮蔽作用素・楕円可積分系の固有値問題

研究課題名（英文）Multiple hypergeometric series, screening operators and elliptic integrable systems associated with affine root systems

研究代表者

白石　潤一（Junichi, Shiraishi）

東京大学・大学院数理科学研究科・准教授

研究者番号：２０２７２５３６

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,200,000円

研究成果の概要（和文）：Non-stationary Ruijsenaars 関数に関する予想（duality予想，Non-stationary Ruijsenaars 方程式の予想，elliptic Ruijsenaars関数への退化予想）を得た． S. Shakirov の非定常差分方程式と，長谷川による量子差分 Painleve VI 方程式（神保・坂井方程式の量子化）との関係を見出した． Shakirov 方程式は量子 Knizhnik-Zamolodchikov (q-KZ) 方程式と同一視でき，affine Laumon 空間上の分配関数がShakirov 方程式の解を与えることを示した．

研究成果の学術的意義や社会的意義
楕円Ruijsenaars系の非定常方程類似と考えられる系に関する（実験的）研究を，affine Laumon空間の上の幾何学を用いて行なった．affine screening 作用素を用いて非定常Ruijsenaars関数を表現する可能性について，一連の予想を得た．また，非定常方程式はパンルベ方程式をその代表として含む重要な研究対象でもある．本研究では，量子q差分系における非定常方程式を発見し，その固有関数の明示的公式の持つ組合わせ的構造に関する研究を行なった．今後も，affine Laumon空間の幾何学を軸として，さまざまな発見がもたらされると期待される．

研究成果の概要（英文）：We obtained several conjectures (duality conjectures, conjecture of non-stationary Ruijsenaars equation, conjecture for degeneration to the elliptic Ruijsenaars functions)
concerning the non-stationary Ruijsenaars functions. We establish the relation between the non-stationary difference equation proposed by S. Shakirov and the quantized discrete Painleve VI equation due to K. Hasegawa (quantization of Jimbo-Sakai's equation). We show that Shakirov's non-stationary difference equation, when it is truncated, implies the quantum Knizhnik-Zamolodchikov (q-KZ) equation with generic spins. We prove that the affine Laumon partition function gives a solution to Shakirov's equation.

研究分野：量子代数の表現論と量子可積分系

キーワード：affine Laumon space　Ruijsenaars system　affine screenings　q-Painleve VI equation　Shakirov equation　q-KZ equation

１．研究開始当初の背景

研究開始当初，次のようなことが分かっていた．また，研究開始当初の状況が現在の状況に与えた影響を説明するために，最近の研究の動向についても多少触れる．

(1) Macdonald 多項式

A 型の Macdonald 多項式はタブロー和公式と呼ばれる組合わせ的公式があるが，それは Laumon 空間上の de Rham 複体の Euler 指標に他ならない(Braverman, Finkelberg, Shiraishi). 多方， そのタブロー和公式は核関数関係式に基づいた積分変換を必要なだけ行うことで得られる q-積分によって得られる公式であるとも考えられる（野海・白石）

(2) 楕円 Ruisenaars 作用素

楕円 Ruisenaars 作用素は Macdonald の q 差分作用素の自然な楕円化であるが，その固有関数の構造は Macdonald 多項式のそれに比較して，相当に複雑である．それに伴い，楕円 Ruisenaars 関数の組合わせ的公式について何も分かっていなかった（し，今でもまだ分からない）． A 型で楕円の場合の核関数関係式には，三角の場合には無い付加条件（balancing condition）なしでは成立せず，核関数を用いて楕円 Ruijsenaars 関数を自由に構成することができない．そのようなことも，困難の原因の一つである．

(3) Langmann の楕円的核関数関係式

Langmann の楕円的核関数関係式は，q-差分系ではなく微分系の非定常楕円 Calogero 系に関して成立する公式である．ここでいう非定常系とは，時間に依存するポテンシャルを持つ量子力学系の問題のことである ．全く一般の状況では無いにしても，楕円的核関数関係式を用いれば，かなり自由に非定常楕円 Calogero 関数を構成することができるため, Langmann は非定常系を, 定常系よりも簡単な記述を許す大切な模型と見做してさまざまな研究を進めていた．例えば, 非定常 Lame 方程式などを詳しく研究していた.

(4) q 差分の非定常系における核関数関係式の欠如

Langmann の楕円的核関数関係式は，微分系の非定常系に対する基本関係式である．それの q-差分類似を考えようとするのは自然であろう．しかしながら，未だにそのようなものは見つけられていない．うまくいかない数多くの実験的考察から，本研究者は，q 差分の非定常系の理解には本質的に新しいものの見方が必要なのでは無いかと感じるようになった．そして，q 差分の非定常系の理解は，定常的な楕円 Ruisenaars 作用素の固有値問題に対してより基本的な立場から情報を与えてくれるとも思われた.

(5) affine Laumon 空間

上述の背景(1)から，本研究者は，もし仮に非定常化された楕円 Ruisenaars 作用素が存在したならば，それに付随する非定常 Ruisenaars 関数が affine Laumon 空間上の de Rham 複体の Euler 指標によって具体的に表示できる可能性があるのではないかと推測した.

(6) 非定常 q-差分 affine 戸田方程式の発見から現在の進展まで

非定常 Ruisenaars 関数は，適当な極限を取れば，非定常 q-差分 affine 戸田系の関数に退化する（はず）．この戸田極限では，q 差分の非定常系の方程式は非常に簡単になっていてそれを実験的研究で捕まえることができるのでは無いかと本研究者は考えた．実際, Delta をラプラシアンとするとき，主要項が q^Delta で与えられるような簡単な方程式（の予想）を発見することができた．この q^Delta 付きの非定常方程式はそれまでの q-差分系には現れなかったような新しい方程式だと思われる．この非定常 q-差分 affine 戸田方程式は，数年後の S. Shakirov の非定常方程式の発見，長谷川の量子化 q-差分 Painleve VI 方程式と同定，等と現在の研究へ繋がっていく．（以下の(12)を参照）．

(7)　位相的頂点作用素の理論

Macdonald 関数は，いわゆる位相的頂点作用素の理論から，量子トロイダル gl(1)代数のある表現論の頂点作用素の行列要素として実現されることが，本研究者のそれまでの研究によって明らかになっていた．その枠組みでは, Macdonald 作用素を代数のある元の作用に帰着させることもできる.

(8) affine screening currents

一方，量子トロイダル gl(1)代数の表現論の頂点作用素のトレースとして affine Laumon 空間上の de Rham 複体の Euler 指標を書き表すことは，困難であるということがさまざまな実験検証により明らかになった．即ち，量子トロイダル gl(1)代数の表現論という出発点を捨てて，他の設定に取り替えて進むしかない状況となった．試行錯誤の後, affine screening currents を用い

た（無限多重の）q-多重積分を思いつき，その考え方が正しいものであることを確認することができた．さらに, affine screening currents の演算子積公式を用いて，非定常 Ruisenaars 関数はある種の modulo N reduction が施された Nekrasov 分配関数であることが示された．換言すれば，非定常 Ruisenaars 関数も，その極限である Macdonald 多項式も，Nekrasov 分配関数である．
(9) duality conjectures
簡単のために，非定常 Ruisenaars 関数を f(x,p|s,kappa|q,t)と書こう．ここに x は座標変数，p は楕円 nome, s はスペクトル変数, kappa は非定常性を表すパラメータ, q と t は Macdonald 多項式に入っている二つのパラメータとする．f(x,p|s,kappa|q,t)を適当に規格化した関数を phi(x,p|s,kappa|q,t)とおく．duality conjectures は次のことを主張する：
(a) phi(x,p|s,kappa|q,t)＝phi(s,kappa | x,p|q,t)
(b) phi(x,p|s,kappa|q,t)＝phi(x,p|s,kappa|q,q/t)
ひとつ目の duality (a) は bispectral duality, ないし，base-fiber duality などと呼ばれている．二つ目の duality (b) は de Rham complex の微分形式の次数を上下逆転するような対称性を示している．本研究者はこれまでにさまざまな研究者たちとこの予想の証明について議論を重ねてきたが，まだ解決には至っていない．

(10) 非定常 Ruisenaars 関数に対する非定常 q-差分方程式
上述の(6)で非定常 q-差分 affine 戸田方程式について述べたが，その非定常 Ruisenaars 関数への拡張（予想）もそれほどの困難はなく発見に至った．ただし，この方程式は Macdonald 多項式の場合でさえ新しいものであり，その意味を汲み取るためには更なる研究の進展が望まれる．この非定常 Ruisenaars 方程式は，それを与える演算子自体が固有関数 f(x,p|s,kappa|q,t)と同じ形をしている．従って，それは Nekrasov 分配関数に関するある種の双線型方程式と見ることもできる．

(11) 定常楕円 Ruisenaars 関数への退化極限
非常に素朴には，非定常パラメータ kappa を１にする極限で，非定常 Ruisenaars 関数 f(x,p|s,kappa|q,t)は楕円 Ruisenaars 作用素の固有関数に退化すると期待される．しかしながら, kappa=１は真正特異点となっており，その特異性の除去が問題となる．適当な関数との比を取ることで，その特異性が除去できること，正規化された関数の kappa=１が楕円 Ruisenaars 作用素の固有関数を与えること，が予想された．この辺りの理解もまだ難しい点が多く残されているようである．

(12) 量子化 q-差分 Painleve VI 方程式
上述 (6) の非定常 q-差分 affine 戸田方程式を見て, S. Shakirov はその拡張を思いついた．彼は共形場の理論の 5 点関数（そのうち一点の縮退場）の満たすべき方程式としてそのような拡張を発見した．彼の見つけた新しい方程式に関する第一報を彼から受け，即座に議論をする機会を設けたが，それが量子化 q-差分 Painleve VI 方程式であることは，色々な状況から考えれば，全く明らかであった．以後, Painleve 方程式と affine Loumon 空間の幾何学に関する研究が，深く関連する研究者たちを含む共同研究として進められ，現在も継続している．

２．研究の目的
上述の「研究開始当初の背景」で箇条書きしたように．本研究者は Ruisenaars 関数に関する問題に関する長期にわたる実験的研究を経て， いくつかの問題の糸口を見つけて来たので，本研究開始時点ではそれに基づいて研究の目的を定めた： 本研究の主な目標は，affine Loumon 空間の幾何学，ないし, affine screening operators の成す代数を用いて，非定常 Ruisenaars 関数の基本的な性質を明らかにすること(上述の予想(9),(10),(11)の肯定的解決)を目指すことである．

また, affine Loumon 空間に関する Nakrasov 分配関数の性質をできるだけ系統的に（例えば，壁越え公式などを用いて）研究すること，そして，そのような理解の上に，楕円 Ruisenaars 作用素の対角化の問題に関する，できるだけ具体的な（ないし，明示的公式を伴った形での）解答を与えること．付け加えると, Koroteev, Shakirov の double elliptic 系(二つの楕円 nome パラメータを持った方程式系) の非定常化，及び基本的性質を理解すること．

本研究遂行中に明らかになった研究目標として，Shakirov 方程式と量子化 q-差分 Painleve VI 方程式の理解．Shakirov 方程式の解と，affine Loumon 空間の幾何学，quantum Knizhnik-Zamolodchikov 方程式等との関係の究明が挙げられる．

３．研究の方法
上述の「研究開始当初の背景」の箇条書きに沿って，研究の方法を述べる．
(1)(2)(3)(4) Macdonald 多項式の明示的公式の徹底した研究，タブロー和公式，核関数関係式の研究（A 型以外の Macdonald 多項式の導出の可能性について研究すること．A 型楕円の場合に

Langmann の核関数関係式の q 差分類似を見出すこと.) affine Laumon 空間の構造から，核関数関係式ないしそれに相当する情報を取り出して見せること.

(5)(6)(7)(8) affine Laumon 空間の上の Nekrasov 分配関数の分類と比較を行う．4 次元の超対称ゲージ場の理論の考えを用いれば， 適当な quiver を用いて理論が分類される． 特に，adjoint matter を持つ場合と， fundamental matter を持つ場合が考えられる． 定常楕円 Ruisenaars 関数は adjoint matter 付きの分配関数，量子化 q-差分 Painleve VI 方程式の固有関数となる分配関数は fundamental matter 付きの分配関数に対応することを示し， それらの異なる状況を正しく整理して理解する.

非定常 q-差分 affine 戸田方程式, 非定常 Ruijsenaars 方程式, Shakirov 方程式など, 分配関数の満たす新しい方程式をできるだけ多方面から研究する（例えば， 適当な quiver と mutation の定める cluster algebra の立場から考察するなど）

量子 gl(n)代数に Dinkin 図式の自己同型に由来する離散的な捻りを加えた代数が Bourgine-Jeong によって提案された. 彼らの代数の表現論から位相的頂点作用素を定めると, affine Laumon 空間の上の Nekrasov 分配関数が系統的に構成できることを示す.

(8)(10)(11) 非定常 Ruijsenaar 関数の基本的な性質を表す諸予想を, affine Laumon 空間の幾何学を用いて理解する．例えば,Bispectral duality については，考えている二つの幾何学が mirror symmetry の意味で dual になっているという観察がありうる.実際にそれを示すための数学的ないし物理学的モデルを構築する．非定常 Ruijsenaar 関数の満たす（はずの）非定常方程式は，双線型方程式と見做すことができる．中島・吉岡の blow up formula のような方程式として解釈できる可能性を探求する．非定常 Ruijsenaar 関数の定常極限を良く理解するためには，おそらくもう少し基本的な性質の研究に立ち戻った方がいいと思われる. 例えば, Macdonald 多項式に対して知られている Pieri 公式の類似が, 非定常 Ruijsenaar 関数に対しても成り立つと考えられる. そのような公式をよく観察すれば, 非定常パラメータ kappa=1 の特異性がどこから生じて, どのような理由で正規化が可能であるのかが理解できる（現在新規の研究計画において研究中）. そのようなより深い理解の上で, より自然に定常的楕円 Ruijsenaar 関数の持つ組合わせ的構造が明明らかにされると期待する.

(12)Shakirov 方程式は q 差分共形場の理論の 5 点関数（そのうち一点の縮退場）の満たすべき方程式として発見された. しかし, 適当なゲージ変換の上で, Shakirov 方程式の解が fundamental matter 付きの affine Laumon 関数によって与えられることが発見された. その事実の証明を与える. その方法として, Shakirov の作用素をすモノミアル規定の上で計算すると, 量子アフィン代数の R 行列が現れることを証明し, さらに, affine Laumon 関数の組み合わせ的構造をを分析すると, q K Z 方程式の q-積分表示に関して知られている松尾基底がそのままの形で見えてくることを示せば良い. さらに, 状況が許せば, gl(2)に対応する Shakirov 方程式の gl(n)版を見出し, その性質を研究する.

４．研究成果
以下，本研究で得られた主な結果について述べ，それらが出版された文献を添えて示す.

Affine screening operator の q-多重積分を用いて， 非定常 Ruijsenaars 関数が導入され，affine Laumon 空間の de Rham 複体の Euler 指標であることが示された．非定常 Ruijsenaars 関数に関する幾つかの予想が得られた． 非定常 q-差分 affine 戸田方程式が発見され， その固有関数が affine Laumon 空間上の pure gauge の Nekrasov 関数であることが予想された.
J. Shiraishi, Affine screening operators, affine Laumon spaces and conjectures concerning non-stationary Ruijsenaars functions, J. Integrable Syst.4, (2019) xyz010, 30 pp.

非定常 Ruijsenaars 関数に関する基本的な性質（収束性を含む）を調べ，非定常 Ruijsenaars 方程式に関する予想を与えた.
E. Langmann, M. Noumi and J Shiraishi, Basic properties of non-stationary Ruijsenaars functions, SIGMA 16 (2020) No. 105, 26 pp.

トロイダル gl(1)代数の表現論，位相的頂点の理論についての論文２つ．そのうちの一つは，特殊な kappa パラメータ(kappa=t^{-1/N})の場合の非定常 Ruijsenaars 関数についての考察：

M. Fukuda, Y. Ohkubo and J. Shiraishi, Generalized Macdonald functions on Fock tensor spaces and duality formulas for changing preferred direction, Comm. Math. Phys. 380 (2020) 1-70.
M. Fukuda, Y. Ohkubo and J. Shiraishi, Non-Stationary Ruijsenaars Functions for kappa=t^{-1/N} and Intertwining Operators of Ding-Iohara-Miki Algebra, SIGMA 16 (2020), No. 116,55 pp.

楕円 Ruijsenaars 関数の構成し，解の存在と収束性を与えた.
E. Langmann, M. Noumi and J. Shiraishi, Construction of Eigenfunctions for the elliptic Ruijsenaars difference operators, Comm. Math. Phys. 391 (2022) 901-950.

Shakirov の方程式と長谷川の方程式を比較， 量子化 q-差分 Painleve VI 方程式と同定. affine Laumon 空間上の fundamental matter 付きの Nekrasov 分配関数が，適当なゲージ因子を除いて，Shakirov の方程式の解を与えることを予想.

H.Awata, K. Hasegawa, H. Kanno, R. Ohkawa, S. Shakirov, J. Shiraishi and Y. Yamada, Non-stationary difference equation and affine Laumon space:quantization of discrete Painleve equation, SIGMA 19 (2023) No. 089, 47 pp.

5．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計5件（うち査読付論文　5件／うち国際共著　3件／うちオープンアクセス　3件）

1．著者名 E. Langmann, M. Noumi, J. Shiraishi	4．巻 391
2．論文標題 Construction of Eigenfunctions for the Elliptic Ruijsenaars Difference Operators	5．発行年 2022年
3．雑誌名 Communications in Mathematical Physics	6．最初と最後の頁 901-950
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00220-021-04195-8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

1．著者名 Hoshino, A., Ohkubo, Y. & Shiraishi, J.	4．巻 111
2．論文標題 Branching formula for q-Toda functions of type B.	5．発行年 2021年
3．雑誌名 Lett Math Phys 111, 126 (2021).	6．最初と最後の頁 126
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s11005-021-01461-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 Langmann, E., Noumi, M. & Shiraishi, J.	4．巻 391
2．論文標題 Construction of Eigenfunctions for the Elliptic Ruijsenaars Difference Operators.	5．発行年 2022年
3．雑誌名 Commun. Math. Phys.	6．最初と最後の頁 901-950
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00220-021-04195-8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1．著者名 Langmann Edwin、KTH Royal Institute of Technology, Sweden、Noumi Masatoshi、Shiraishi Junichi、KTH Royal Institute of Technology, Sweden、The University of Tokyo, Japan	4．巻 12
2．論文標題 Basic Properties of Non-Stationary Ruijsenaars Functions	5．発行年 2020年
3．雑誌名 Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications	6．最初と最後の頁 105, 26 pages
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3842/SIGMA.2020.105	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

1．著者名 Jun'ichi Shiraishi	4．巻 4
2．論文標題 Affine screening operators, affine Laumon spaces and conjectures concerning non-stationary Ruijsenaars functions	5．発行年 2019年
3．雑誌名 Journal of Integrable Systems	6．最初と最後の頁 xyz010
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1093/integr/xyz010	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

〔学会発表〕　計10件（うち招待講演　6件／うち国際学会　7件）

1．発表者名 J. Shiraishi
2．発表標題 Conjectures concerning the non-stationary Ruijsenaars function
3．学会等名 Integrable Systems & Symmetric Functions, Glasgow（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2023年

1．発表者名 J. Shiraishi
2．発表標題 Discretization and quantization of Painleve VI equation
3．学会等名 5th Bangkok Workshop on Discrete Geometry, Dynamics and Statistics（国際学会）
4．発表年 2023年

1．発表者名 J. Shiraishi
2．発表標題 Quantization of Discrete Sixth Painleve Equation and Shakirov's Conjecture
3．学会等名 2022 Workshop on Elliptic Integrable Systems（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2022年

1．発表者名
大久保勇輔、白 石 潤 一、星 野 歩

2．発表標題
B型q-戸田関数の明示公式

3．学会等名
日本数学会秋季総合分科会（千葉大）

4．発表年
2021年

1．発表者名
大久保勇輔、白 石 潤 一、星 野 歩

2．発表標題
変形Koornwinder作用素とC型Macdonald多項式I

3．学会等名
日本数学会年会（埼玉大）

4．発表年
2022年

1．発表者名
大久保勇輔、白 石 潤 一、星 野 歩

2．発表標題
変形Koornwinder作用素とC 型Macdonald多項式II

3．学会等名
日本数学会年会（埼玉大）

4．発表年
2022年

1．発表者名
白 石 潤 一

2．発表標題
Quantization of Discrete Sixth Painleve Equation and Shakirov's Conjecture

3．学会等名
2022 Workshop on Elliptic Integrable Systems（招待講演）（国際学会）

4．発表年
2022年

1．発表者名 Junichi Shiraishi
2．発表標題 Some conjectures concerning non-stationary Ruijsenaars functions
3．学会等名 New Connections in Integrable Systems September 29 - October 2, 2020（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2020年

1．発表者名 Junichi Shiraishi
2．発表標題 Branching formula for q-Toda function of type B
3．学会等名 Workshop on Elliptic Integrable Systems（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2021年

1．発表者名 Junichi Shiraishi
2．発表標題 Affine screening operators, affine Laumon spaces, and conjectures concerning non-stationary Ruijsenaars functions
3．学会等名 Elliptic integrable systems, special functions and quantum field theory（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2019年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

6．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

7．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
スウェーデン	KTH AlbaNova University			
ロシア連邦	IITP, Moscow			
スウェーデン	KTH			
ロシア連邦	Landau Institute			