

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 5 年 6 月 5 日現在

機関番号：12701

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2019～2022

課題番号：19K03514

研究課題名(和文) 時間的・空間的に相互作用をもつ格子確率モデルに関する精密な極限定理

研究課題名(英文) Finer limit theorems for stochastic models on lattices with spatio-temporal interactions

研究代表者

竹居 正登 (Takei, Masato)

横浜国立大学・大学院工学研究院・准教授

研究者番号：60460789

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,300,000円

研究成果の概要(和文)：パーコレーション問題は、スポンジのような多孔質の物体への流体の浸透現象のモデルとして研究が始められ、現在ではランダムな図形の解析・研究において最も基本的な確率モデルと位置づけられている。このモデルの研究を深めるとともに、それを通じて得られた経験を生かして、ランダムウォーカーの軌跡の特徴とその極限挙動に及ぼす影響を精密な極限定理によって記述し定量化することを目的として研究を推進した。ファーストパッセージパーコレーション問題、過去の履歴から影響を受けるランダムウォーク等について精密な極限定理を得ることができた。この研究の応用として、至るところ微分不可能な連続関数の性質を記述する極限定理も得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

空間構造をもった確率モデルは、物理・化学・生物現象の研究においてのみならず、人々の意見が合意に達するか否かといった社会現象の研究等においても重要な役割を果たしており、多様な現象のモデル構築と解析を可能にすることが求められている。本研究では、浸透現象の数学的解析における様々な着想を基盤とし、記憶があり学習しながら歩むランダムウォーク等に関する成果を得て、この方面の研究に一定の寄与をした。また、本研究で得られた知見の副産物として、至るところ微分不可能な連続関数の性質を記述する極限定理が得られており、数学の中での周辺分野にも貢献することができた。

研究成果の概要(英文)：Percolation process was originally introduced as a model of penetration of fluids into porous media. Nowadays it is one of the most fundamental stochastic models concerning random geometry. From the viewpoint of percolation theory, we studied finer limit theorems for several stochastic models with spatio-temporal interactions. We obtained fine limit theorems for first-passage percolation, random walks with memory effect, and so on. Among others we briefly describe our result on the linearly edge-reinforced random walk on the half-line: Assign weight one to each edge of the half-line. The walker jumps to one of the neighboring vertices with probability proportional to weight of the edge connecting them (with reflection at 0). After crossing an edge, its weight is increased by one. The position of the walker at time  $n$  is denoted by  $S_n$ . We proved that  $\liminf S_n=0$  and  $\limsup S_n/(\log_4 n)=1$  with probability one.

研究分野：確率論

キーワード：パーコレーション ランダムウォーク 高木関数

## 1. 研究開始当初の背景

空間構造をもった確率モデルは、物理・化学・生物現象の研究においてのみならず、人々の意見が合意に達するか否かといった社会現象の研究等においても重要な役割を果たしており、多様な現象のモデル構築と解析を可能にすることが求められていた。様々なモデルが提案され、数値計算と発見的議論による研究が国内外で多数行なわれている一方で、単純に見えるモデルであっても数学的に厳密な取り扱いがしばしば困難を伴うため、新たな局面を切り開く研究が望まれていた。パーコレーションは、ランダムな図形の解析・研究において最も基本的な確率モデルと位置づけられ、この問題を基軸として種々の確率モデルの数学的研究を推進することが極めて重要であると考えていた。

## 2. 研究の目的

パーコレーション問題は、スポンジのような多孔質の物体への流体の浸透現象のモデルとして研究が始められた。大きく分けて次の2つの設定がある：格子点(サイト)ごと、独立に確率  $p$  で通過可能 / 確率  $1-p$  で通過不可能とするサイト問題と、格子点をつなぐ辺(ボンド)に対して通過可能性を考えるボンド問題である。通過可能な点や辺によって、格子はいくつかの連結成分(クラスター)に分けられる。パラメータ  $p$  を変化させたとき、特別な値  $p_c$  を境にクラスターの図形的特徴が劇的に変化する。相互作用をもつ粒子が格子上に配置されている系で同様の問題を考えることができる：統計力学の磁性モデルの1つである Ising モデルにおいては、低温では磁性が生じ、高温になると磁性を失うという相転移がある。2次元の場合、ランダムなスピン配置においてパーコレーションが起こるか否かに完全に対応している。一方、自己の軌跡が推移確率に影響を与える確率過程は、過去の履歴から受ける相互作用の強さによって極限挙動が大きく変化することがある。ランダムな図形に関する確率論としてのパーコレーション問題の研究をさらに掘り下げ、その視点を生かしてランダムウォーカーの軌跡の特徴とその極限挙動に及ぼす影響を精密な極限定理の形で記述し定量化することを目的とした。

## 3. 研究の方法

時間的・空間的に相互作用の生じる確率モデルについて、パーコレーションの視点を生かして研究を進めた。

(A) 空間的に相互作用のある確率モデルとして、ベルヌーイ・パーコレーションに基づいて定まるファーストパッセージパーコレーション問題を中心に据えて研究を行なった。

(B) 時間的に相互作用のある確率モデルとして、強化ランダムウォーク(ウォーカーがグラフの各辺に与えられた重みに比例した確率で推移し、ウォーカーが通った辺の重みを増加させるモデル)を中心に据えて研究を行なった。

(C) 過去の履歴から影響を受けるランダムウォークの別な種類のモデルとして、ある種のランダムグラフの上のスピン系とも関連をもち、『記憶のつながり方』の解析にパーコレーションの視点が生きる Elephant Random Walk について研究を行なった。

## 4. 研究成果

- (1)  $d$ 次元格子の各辺に対して独立に、その辺を通過するための「所要時間」として確率  $p$  で0を、確率  $1-p$  で1を割り当てる。原点から出発しある点に到達するまでの最短所要時間について調べるのがベルヌーイ・ファーストパッセージパーコレーションの問題である。所要時間0の辺が  $n$ 本つながる確率が  $n$ について指数的に減少する状況において、時間  $t$ 以内に到達可能な格子点の集合  $B(t)$ の平均的な形状が  $p$ を変えるとどの程度変化するかを研究し、任意の方向に対する浸透速さの変化のオーダーを特定することができた。また、この研究の副産物として、複数の最適経路に共通して含まれる辺の本数の期待値について、所要時間0の辺が  $n$ 本つながる確率が  $n$ についてべきの形でゆっくり減少するという臨界的な状況においても下からの評価を得た。
- (2)  $d$ 次元格子の頂点にランダムに彩色を行ない、隣接する頂点の色が一致しているか異なるかでそれらを結ぶ辺を通過するための「所要時間」を定める。原点から出発し、ある軸の正の方向に距離  $n$ だけ離れた点に至る路で所要時間を最小にするものに注目する。このような最適経路全体の和集合の平均サイズのオーダーを求めることができた。最適経路全体の共通部分の平均サイズのオーダーを求めることが今後の課題として残されている。
- (3) 半直線上の線型ERRWについては、点  $x$ の右の辺の初期重みが  $x^\alpha$ であるとき、ある辺を1回横断するごとに増やす重み  $>0$ によらず、ウォーカーが再帰的となるための必要十分条件

は  $a < 1$  とわかっている．時刻  $n$  でのウォーカーの位置を  $S_n$  とする． $a < 1$  のとき， $S_n$  を  $(\log n)^{1/(1-a)}$  で割ったときの極限が  $> 0$  に依存する正の定数となる確率が 1 であることを証明した．さらに，臨界的な  $a=1$  の場合については， $\alpha$  が 2 より大きいか否かによって，記憶の効果が  $S_n$  のオーダーに与える影響が大きく変化することを示した．

- (4) 記憶をもつランダムウォークの一種である Elephant Random Walk について，極限定理の研究を行なった．「記憶の強さ」に相当するパラメータ  $\alpha$  ( $-1 < \alpha < 1$ ) が臨界値  $1/2$  を超えると，通常のランダムウォークより大きなオーダーで拡散することが知られている．記憶の効果が強く優拡散的になる場合に，記憶によって生み出されるランダムなドリフトからのゆらぎが Gauss 型であることを示す従来よりも精密な極限定理を証明した．また，記憶に頼らない場合の推移確率が漸近的に対称ランダムウォークのそれに近づくとき，この近づき方の速さに応じて極限挙動に変化が起きることを示した．
- (5) Elephant Random Walk において，「記憶の強さ」に相当するパラメータ  $\alpha$  が臨界値  $1/2$  以下の場合には，ウォーカーの位置に関して中心極限定理が成立することが知られている．この中心極限定理におけるモーメント収束の速さがパラメータ  $\alpha$  ( $-1 < \alpha < 1/2$ ) にどのように依存するかについて研究し，奇数次モーメント及び 2 次モーメントの収束は  $\alpha$  を小さくするほど速くなるのに対して，4 次以上の偶数次モーメントの収束は  $\alpha$  を負の値にしても  $\alpha=0$  の場合より本質的には速くならないことを証明した．
- (6) Elephant Random Walk は，uniform random recursive tree 上のパーコレーション問題と密接な関連をもつ．このパーコレーション問題における原点のクラスターの大きさの情報をよく反映する，Elephant Random Walk の変形版について研究を行った．原点のクラスターの大きさの全ての次数の階乗モーメントを正確に求めたほか，原点のクラスターの大きさに対する中心極限定理と重複対数の法則を全パラメータ領域で証明した．
- (7) 至る所微分不可能な連続関数の有名な例である高木関数を一般化して得られる連続関数のクラスにおいて，極限関数への収束の速さを調べる際に Elephant Random Walk の場合と似た構造があることに着目し，典型的な点における収束の速さを確率論の極限定理を用いて精密に記述する研究を行なった．元祖の高木関数では大数の法則に相当するものが通常の意味では成立しないことも示した．

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計8件（うち査読付論文 8件/うち国際共著 2件/うちオープンアクセス 3件）

1. 著者名 Takei Masato	4. 巻 26
2. 論文標題 Almost sure behavior of linearly edge-reinforced random walks on the half-line	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Electronic Journal of Probability	6. 最初と最後の頁 1-18
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1214/21-ejp674	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Tatsuya Miyazaki, Masato Takei	4. 巻 181
2. 論文標題 Limit Theorems for the 'Laziest' Minimal Random Walk Model of Elephant Type	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Statistical Physics	6. 最初と最後の頁 587-602
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s10955-020-02590-4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Jiro Akahori, Andrea Collevocchio, Masato Takei	4. 巻 24
2. 論文標題 Phase transitions in edge-reinforced random walks on the half-line	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Electronic Communications in Probability	6. 最初と最後の頁 1~12
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1214/19-ECP240	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する
1. 著者名 Naoki Kubota, Masato Takei	4. 巻 177
2. 論文標題 Gaussian fluctuation for superdiffusive elephant random walks	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Statistical Physics	6. 最初と最後の頁 1157~1171
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s10955-019-02414-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Shoto Osaka, Masato Takei	4. 巻 37
2. 論文標題 On the rate of convergence for generalized Takagi functions	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics	6. 最初と最後の頁 193 ~ 212
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s13160-019-00398-8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Andrea Collevocchio, Masato Takei, Yuma Uematsu	4. 巻 130
2. 論文標題 Functional central limit theorem for random walks in random environment defined on regular trees	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Stochastic Processes and Their Applications	6. 最初と最後の頁 4892 ~ 4909
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.spa.2020.02.004	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Kubota Naoki, Takei Masato	4. 巻 14
2. 論文標題 Comparison of limit shapes for Bernoulli first-passage percolation	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 International Journal of Mathematics for Industry	6. 最初と最後の頁 2250005
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/S2661335222500058	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Hayashi Masafumi, Oshiro So, Takei Masato	4. 巻 2023
2. 論文標題 Rate of moment convergence in the central limit theorem for the elephant random walk	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment	6. 最初と最後の頁 023202 ~ 023202
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1088/1742-5468/acb265	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計10件（うち招待講演 6件 / うち国際学会 2件）

1. 発表者名 竹居正登
2. 発表標題 Elephant random walkに対する中心極限定理におけるモーメント収束の速さについて
3. 学会等名 研究集会「第19回 大規模相互作用系の確率解析」（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 林正史, 大城壮, 竹居正登
2. 発表標題 Elephant random walk に対する中心極限定理におけるモーメント収束の速さについて
3. 学会等名 日本数学会2022年度年会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 赤堀次郎, Andrea Collevocchio, 竹居正登
2. 発表標題 半直線上のedge-reinforced random walkにおける相転移
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 竹居正登
2. 発表標題 Recurrence and transience preservation for edge-reinforced random walks on the half-line
3. 学会等名 研究集会「大規模相互作用系の確率解析」（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Masato Takei
2. 発表標題 Limiting behavior of edge-reinforced random walks on the half-line
3. 学会等名 Probability Seminar Series, NYU Shanghai (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Masato Takei
2. 発表標題 Probabilistic analysis of Takagi class functions: Rate of convergence
3. 学会等名 Workshop "Number Theory and Ergodic Theory" (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 大坂翔人, 竹居正登
2. 発表標題 高木クラスの関数における収束の速さについて
3. 学会等名 日本数学会年会(中止, 講演成立)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 竹居正登
2. 発表標題 Random walks with step-reinforcement
3. 学会等名 研究集会 "Crossroad of Statistical Physics and Probability Theory" (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 竹居正登
2. 発表標題 Bernoulli first-passage percolationにおける極限形状の比較
3. 学会等名 研究集会「大規模相互作用系の確率解析」(招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 竹居正登
2. 発表標題 Elephant random walkに対する極限定理
3. 学会等名 研究集会「マルコフ過程とその周辺」(招待講演)
4. 発表年 2023年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 竹居正登	4. 発行年 2020年
2. 出版社 森北出版	5. 総ページ数 224
3. 書名 入門 確率過程	

〔産業財産権〕

〔その他〕

<p>横浜国立大学 研究者総覧  <a href="https://er-web.ynu.ac.jp/html/TAKEI_Masato/ja.html">https://er-web.ynu.ac.jp/html/TAKEI_Masato/ja.html</a></p>
--



## 6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	コレヴェッキオ アンドレア  (Collevecchio Andrea)		
研究協力者	赤堀 次郎  (Akahori Jiro)		
研究協力者	林 正史  (Hayashi Masafumi)		
研究協力者	久保田 直樹  (Kubota Naoki)		
研究協力者	大城 壮  (Oshiro So)		
研究協力者	植松 勇馬  (Uematsu Yuma)		
研究協力者	宮崎 竜也  (Miyazaki Tatsuya)		
研究協力者	大坂 翔人  (Osaka Shoto)		

6. 研究組織（つづき）

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	河村 翔平  (Kawamura Shohei)		

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
オーストラリア	Monash University			