

令和 6 年 5 月 29 日現在

機関番号：17102

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2019～2023

課題番号：19K03516

研究課題名(和文)作用素環の核型次元の研究

研究課題名(英文)Study on the nuclear dimension of operator algebras

研究代表者

佐藤 康彦(Sato, Yasuhiko)

九州大学・数理学研究院・准教授

研究者番号：70581502

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,000,000円

研究成果の概要(和文)：作用素環の分類可能性を特徴付ける核型次元を研究し、核型次元が有限な作用素環の力学系や条件付き期待値の研究を行った。特にトレースをただ一つ持つ核型次元有限な作用素環の上に実現可能なKMS状態の束を構成し、Powers-Sakai予想の反例を非可算無限個構成する事に成功した。また、条件付き期待値が存在しない自己準同型の構成を核型次元有限な作用素環の上に構成し、E. Kirchbergの未解決問題を解決した。また、これまでの分類理論では技術的に単純性を仮定するのが基本的であったが、技術的な障害を克服する目的でRAF環と名付けた非単純作用素環の分類理論を行った。

研究成果の学術的意義や社会的意義

作用素環論における長年の分類理論の発展により、近年とても抽象度の高い分類理論が定理として完成した。本研究はそのパワフルな分類理論を未解決問題へ応用し、得られた解答の一般化や解決を行ったものである。また技術的な側面として数理物理でよく研究されているKMS状態の基本構造を調べる事で、今まで議論されてこなかった非単純な作用素環の分類が必要である事がわかった。この成果は、これまで脚光を浴びなかった非単純な分類理論の重要性を示し、新たな領域を開拓する契機となり得る。さらに分類理論の応用という形で、分類理論に多大な功績を残したE. Kirchberg氏の残した未解決問題を解決した。

研究成果の概要(英文)：We have studied the nuclear dimension, which characterizes the classifiability of nuclear C^* -algebras, their dynamical systems and conditional expectations of operator algebras with finite nuclear dimension. In particular, we construct KMS states on operator algebras with the bundle structure under the assumption of finite nuclear dimension with a unique tracial state, as a consequence of this construction we have obtained uncountably many counterexamples to the Powers-Sakai conjecture. We have also constructed an endomorphism without conditional expectation on operator algebras with finite nuclear dimension, solving an open problem by E. Kirchberg. In previous classification theories, it has been fundamental to assume a condition of the simplicity, but in order of the technical obstructions, we have presented a classification theory for nonsimple operator algebras, which we call rationally approximately finite dimensional (RAF) algebras.

研究分野：作用素環論

キーワード：分類理論 作用素環論 核型次元 Jiang-Su 環

1. 研究開始当初の背景

作用素環とよばれる数学的对象は数理物理の厳密な定式化に端を発し、他の数学分野を取り入れながら発展してきた。研究代表者の専門である核型C*環の分類理論は、物理的な考察から自然に現れるCAR環や無理数回転環を含む作用素環のクラスの分類を目標として、J. Glimm, O. Bratteli, G. A. Elliott らによって始められた。長年の作用素環研究者の功績により、現在では従順性を持つ多くのC*環が分類可能である事がわかり、当初の物理的な背景から大きく離れた作用素環に対しても応用が可能である事が判明している。

「いつ従順なC*環はK群の情報で分類可能であるか？」という基本的な問題が多く研究者によって考えられていたが、A. Toms と W. Winter によってこの問題が明確に定式化され、「厳比較性」、「Jiang-Su環の吸収性」、「核型次元の有限性」という条件が分類可能である事を示す候補としてまとめられた。現在では Toms-Winter 予想と呼ばれるこの問題に対し、私の先行研究では、純無限やトレースが唯一といった基礎的な条件下でこの予想が肯定的である事を示し、分類理論を用いた多くの応用を得る事に成功した。この研究を土台に最近の分類理論では、抽象的な条件下において上述の3つの性質のいずれかが成立するものはK群の不変量で分類が可能である。

また、これまでの Toms-Winter 予想に関連する研究過程から、核型次元の有限性や具体的な計算方法を確立する事に成功し、当初「核型次元が有限」という形で予想されていた Toms-Winter 予想は「核型次元が1以下」という最適な値として解決できている。

2. 研究の目的

作用素環の分類理論では核型、もしくは従順とよばれる作用素環の完全分類を目指して、研究が行われて来た。Elliott プログラムとよばれるこの方針はK群という代数的な枠組みで大きく広がり、全ての核型作用素環が分類可能であると予想されていた。しかし、この予想はJ. Villadsen, M. R. Rørdam, A. S. Toms らにより反例が示され、プログラムの改変が要請された。現在では核型次元有限な場合に作用素環は分類可能であると考えられ、その方向性でToms と Winter が上述の予想を提出していた。本研究では分類可能なC*環の条件の一つである「核型次元」に注目し、更にその計算を精密に議論し、核型次元に付随する精度の高い計算を与える事が目的である。また、その応用として群作用と分類理論の関わりを明らかにする事も研究目標とする。

特に本研究では、次の問題へ焦点を絞る「核型次元やそれに付随する階数がどの様に分類理論に反映されるか?」、「与えられた自然数に対して、それを単純な環の核型次元として実現する事は可能か?」、「Toms-Winter 予想のトレースの条件を取りのぞく手法」、「核型次元と安定階数、実階数、トレース階数など他の次元との関連性」、「核型次元で得られた分類理論の群作用への応用」。

3. 研究の方法

これまで得られてきた方法をより深化させ、独自の技術を得る事も重要であるが、数学の研究では他の研究者との交流がとても重要である。特に本研究の方針としては、他の研究者との技術の融合を深め新しい技術発展を目指し成果が得られた。具体的には先行研究の共著者の一人であるMunster 大学のW. Winter 氏、Copenhagen 大学の M. Rørdam 氏らとメールのやりとりを通し、コロナ禍においても意見交換を行っている。また上海華東師範大学のH. Lin 氏や河北師範大学のG. Gongらのもとへ研究滞在を行い、彼らとのセミナーや研究会を通し本研究のアイデア交換を行った。

また、作用素環の分類理論に関し日本は他国にないアドバンテージを持っている。本研究の主題である分類理論を中心とした研究集会を京都のRIMS研究所で開催し、作用素環と群作用の専門家である泉正己氏、松井宏樹氏や小沢登高氏らと本研究に関し意見交換を行い、研究の障害を解決する糸口を得る事ができた。

コロナ禍で海外出張の制限がされる中、オンラインを活用した共同研究により K. Thomsen氏や G. A. Elliott 氏らと共同研究を行った。力学系と核型次元の関わりとして Jiang-Su 環上の時間発展を考え、そのKMS状態の研究を行った。本研究課題の核型次元有限な作用素環を扱うにあたっては Jiang-Su 環と呼ばれる基礎的なC*環は避けては通れないため、この環に注目して研究を行う必要があった。具体的には、実数直線上の全ての局所コンパクト集合に対し、これをKMS状態のパラメータとして実現しえる時間発展を Jiang-Su 環の上に構成した。Jiang-Su 環は核型次元有限な C*環へ自然に吸収される事が知られている。この構成により全ての核型次元有限な単純 C*環でトレースを持つものに対し、与えられたコンパクト集合をKMS状態として実現しえる時間発展が構成できる様になった。この研究の応用として、これまで構成されていた Powers-Sakai 予想の反例をAF環のクラスから核型次元有限なC*環のクラスへ拡張する事ができる。更に、今まで基本的に1つしか確認できていなかった反例が非加算無限個存在すること等が証明できた。

4. 研究成果

- (1) 核型次元有限な従順作用素環の上に特殊な力学系（実数体 \mathbb{R} による flow）を構成し、作用素環として構成可能な KMS 状態の実現を行った。これまで松井宏樹氏との共同研究の中で Powers-Sakai 予想の否定解を与えていたが、これは UHF 環と呼ばれる分類可能な作用素環に対する研究であり、この上に特殊な flow を構成し KMS 状態がトレース以外に現れないという事実から反例を示していた。本研究では力学系と核型次元という方向性で、この議論を一般化し Jiang-Su 環上の時間発展を考え、その KMS 状態の研究を行った。具体的には、実数直線上の全ての局所コンパクト集合に対し、これを KMS 状態のパラメータとして実現しえる時間発展を Jiang-Su 環の上に構成した。更に本研究では、この構成方法を精密に議論する事で、各パラメータの上で与えられる KMS 状態全体の構造を自由に実現し得る事を示した。正確に述べると与えられた C^* 環の上では Choquet 単体のなす束として全ての KMS 状態が記述されるが、逆に実現し得る Choquet 単体の束を KMS 状態の束として構成する事が出来るようになった。この構成により全ての核型次元有限な単純 C^* 環でトレースを持つものに対し、与えられた局所コンパクト KMS 束を実現しえる時間発展が構成できた。①, ②
- (2) 非単純な作用素環に対する分類理論の構成を Jiang-Su 環を含む RAF 環に対して行った。これまで考えられた作用素環の分離理論では主に「単純性」という基本条件が仮定され、その条件下で分類可能性が議論されてきた。上記の KMS 状態を構成する過程において、非単純な作用素環に対する分類理論が技術的に必要である事が判明した。大雑把に状況を述べると KMS 状態のパラメータが有界な場合は単純な作用素環の分類理論が直接応用できたが、パラメータが非有界な場合は非単純な作用素環の分類理論が必要になる。非有界な空間への拡張にはこれまで考えられていた単純な核型作用素環に対する分類理論を適応するだけでは不十分であり、対応する非単純な核型作用素環の分類理論が要請された。この技術的な困難を克服するため、本研究では Rationally AF algebra (RAF) と名付けた新しい作用素環の概念を導入し、非単純な RAF 環に関する分類理論を構築した。単純性という基本条件を仮定しても、多くの分類可能な核型作用素環が K_0 -群と K_1 -群の情報で分類される。一方で我々が導入した RAF 環は非単純の条件下でも K_0 -群の条件のみで計算可能という利点が得られる。これは KMS 状態の研究と核型次元の研究のみならず分類定理自身を拡張する進展といえる。②
- (3) 分類理論の応用として E. Kirchberg 氏の残した条件付き期待値に関する問題を解決した。弱位相で閉じたトレースを持つ von Neumann 環の理論においては、von Neumann 環とその部分環の間でいつでもトレースを保存する条件付き期待値の存在が古くから知られている。この問題をノルム位相で閉じた C^* 環のレベルで自然に考えると簡単な反例が見つかるが「数理論理でよく現れる CAR 環 (UHF 環) や無理数回転環とその自己準同型の上では、常に条件付き期待値が存在するか？」という問題が Kirchberg 氏によって出題されていた。CAR 環や無理数回転環は von Neumann 環と同じく実階数が 0 であり、多くの場合に条件付き期待値の存在が期待される。この問題は彼の残した遺稿に公表されていた問題で、我々の核型次元の研究とは異なる文脈の物であった。しかし、これまでの研究から条件付き期待値の存在は核型な作用素環、特に核型次元有限な作用素環でよく研究された対象である。その事を踏まえ本研究で主要な Jiang-Su 環と呼ばれる作用素環の自己準同型の条件付き期待値の非存在性が直接応用できる事に気づき、問題の解決に至った。より一般に、核型次元が有限な単純 C^* 環の上には必ず条件付き期待値が存在しない自己準同型が存在する事を示した。本論文は Munster Journal of Mathematics に受理され、2022 年に亡くなった E. Kirchberg 氏のための特別号に掲載予定である。③

参考文献

- ① George A. Elliott, Yasuhiko Sato, Klaus Thomsen, 「On the Bundle of KMS State Spaces for Flows on a Z -Absorbing C^* -Algebra」, Communications in Mathematical Physics, 2022, 393, p.1105-1123.
- ② George A. Elliott, Yasuhiko Sato, 「Rationally AF algebras and KMS states of Z -absorbing C^* -algebras」, Arxiv, arXiv:2207.11653v2 [math.OA].
- ③ Yasuhiko Sato, 「Endomorphisms of Z -absorbing C^* -algebras without conditional expectations」, Munster Journal of Mathematics, 2024 掲載予定.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計8件（うち査読付論文 5件 / うち国際共著 3件 / うちオープンアクセス 5件）

1. 著者名 Yasuhiko Sato	4. 巻 --
2. 論文標題 Endomorphisms of Z -absorbing C^* -algebras without conditional expectations	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Munster Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 --
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 George A. Elliott, Yasuhiko Sato, Klaus Thomsen	4. 巻 393
2. 論文標題 On the Bundle of KMS State Spaces for Flows on a Z -Absorbing C^* -Algebra	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Communications in Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 p.1105-1123
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00220-022-04386-x	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する
1. 著者名 George A. Elliott, Yasuhiko Sato	4. 巻 -
2. 論文標題 Rationally AF algebras and KMS states of Z -absorbing C^* -algebras	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Arxiv, arXiv:2207.11653v2 [math.OA]	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する
1. 著者名 Yasuhiko Sato	4. 巻 -
2. 論文標題 2-positive almost order zero maps and decomposition rank	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of operator Theory	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 佐藤 康彦	4. 巻 -
2. 論文標題 Non commutative continuous selection theorem and Borsuk-Pixley ' s example	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 作用素論・作用素環論研究集会 予稿集	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計12件 (うち招待講演 11件 / うち国際学会 5件)

1. 発表者名 Yasuhiko Sato
2. 発表標題 Summer School on the Classification of C^* -algebras(10 lecture series)
3. 学会等名 Summer School on C^* -algebras and International workshop on operator theory and operator algebras (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Yasuhiko Sato
2. 発表標題 Non-simple rational dimension groups and rationally AF algebras
3. 学会等名 The 18th Special Week on Operator Algebras (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Yasuhiko Sato
2. 発表標題 Endomorphisms of Z -absorbing C^* -algebras without conditional expectations
3. 学会等名 RIMS 研究集会, Recent Developments in Operator Algebras (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Yasuhiko Sato
2. 発表標題 Endomorphisms of Z -absorbing C^* -algebras with finite Watatani indices
3. 学会等名 RIMS共同研究, 作用素環と種々の対称性 (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Yasuhiko Sato
2. 発表標題 Non-simple Rationally AF algebras and KMS states
3. 学会等名 Special Week on Operator Algebras, 2022 Shanghai (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 佐藤 康彦
2. 発表標題 Classification of non-simple Rationally AF algebras and KMS states
3. 学会等名 京都作用素環セミナー (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Yasuhiko Sato
2. 発表標題 Uncountably many flows which are not approximately inner on Z -absorbing C^* -algebras
3. 学会等名 Special Week on Operator Algebras 2021 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 佐藤康彦
2. 発表標題 Non-simple rationally AF algebras and KMS states
3. 学会等名 RIMS共同研究「作用素環論における対称性と従順性」(招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 佐藤 康彦
2. 発表標題 Non commutative continuous selection theorem and Borsuk-Pixley 's example
3. 学会等名 作用素論・作用素環論研究集会2020(招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 佐藤 康彦
2. 発表標題 Non-Commutative Borsuk-Pixley 's examples in purely infinite cases
3. 学会等名 RIMS共同研究「作用素環と量子力学系」(招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Yasuhiko Sato
2. 発表標題 2-positive maps of almost order zero and decomposition rank
3. 学会等名 Special Week on Operator Algebras 2019, in the East China Normal University(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 佐藤 康彦
2. 発表標題 Actions of amenable groups on trace spaces of C*-algebras
3. 学会等名 九州大学、作用素環論エルゴード理論セミナー、
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
カナダ	University of Toronto			
デンマーク	Aarhus University			