1版

様　式　C－19、F－19－1、Z－19　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　５年　４月２４日現在

機関番号：１４５０１

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2019～2022

課題番号：１９Ｋ０３５１８

研究課題名（和文）一様分布論の確率論的研究

研究課題名（英文）Probabilistic study on uniform distribution theory

研究代表者

福山　克司（Fukuyama, Katusi）

神戸大学・理学研究科・教授

研究者番号：６０２１８９５６

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,400,000円

研究成果の概要（和文）：等比数列とその摂動の差異量の漸近挙動を研究してきており、特に摂動に関しては無理数回転による摂動は等比数列の持つ定常列としての従属性を失わせる効果があることが明らかになり、またそれ以外の摂動に関しては必ずしも従属性の消滅は期待できず、本来ある従属性から独立の場合まで連続的に実現する摂動が存在することも証明できた。また部分列の差異量に関して、等比数列の部分列の差異量の漸近挙動に関し、従属性を失わせることができることも依然示していたが、たとえ従属性を失っているように差異量の重複大数の法則から判断される場合でも、さらに部分列を取り元の従属性を持つ場合と同様の状況を実現できることを明らかにした。

研究成果の学術的意義や社会的意義
等比数列の差異量の漸近挙動については判明していないことが大半であったが、測度論的手法を用いることによりほとんどすべての初期値に関して理論を展開することが可能になってきた。特に部分列の挙動や摂動の影響など等比数列から派生する様々な問題に関して知見が付け加わったことにより、一様分布論の測度論的研究の進展に寄与したものである。

研究成果の概要（英文）：We studied the asymptotic behaviour of the discrepancies of geometric progression. If we perturb geometric progression with almost every initial term by using irrational rotation, the dependence as the stationary sequence seems to be eliminated by viewing the law of the iterated logarithm for discrepancies. We can also see the dependence not necessary vanishes by other perturbation, and see that any dependence smaller that original one can be realized by using some appropriately chosen perturbation. As to the subsequence of geometric progressoin, sometimes the dependence seems to be vanished, but we can take subsequence of it to make it recover the dependence of original sequence in the sense of the law of the iterated logarithm for discrepancies.

研究分野：確率論

キーワード：等比数列　一様分布論　差異量

1. 研究開始当初の背景

Weyl の定理の主張は $n_{k+1}-n_k>c>0$ であれば $\{\langle n_k x\rangle\}$ は単位区間上一様分布するというものであった。これは discrepancy

$$\sup_{0\le a'<a<1}\left|\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\mathbf{1}_{[a',a)}(\langle n_k x\rangle)-(a-a')\right|;$$

で与えられる discrepancy $D_N(\{n_k x\})$ が 0 に収束することを導くものである。等差数列に関しては Khinchin と Kesten により、収束の速さは決定されていたが、等比数列に関しては研究が送れていた。

Philipp は Hadamard 間隙条件 $n_{k+1}/n_k>q>1$ をみたす $\{n_k\}$ に対し重複対数型の評価

$$\frac{1}{4\sqrt{2}}<\varlimsup_{N\to\infty}\frac{ND_N(\{n_k x\})}{\sqrt{2N\log\log N}}\le C_q\quad \text{a.e.}$$

を示して、 Erdős-Gál の予想を解決している。

研究代表者の以前の研究により $|\theta|>1$ をみたす実数 θ に関して以下の重複対数の法則が示されている。

$$\varlimsup_{N\to\infty}\frac{ND_N\{\theta^k x\}}{\sqrt{2N\log\log N}}=\Sigma_\theta,\quad \text{a.e.}$$

ここで θ が有理巾根でない場合即ち $\theta^j\notin\mathbf{Q}$ $(j=1,2,\dots)$ なら $\Sigma_\theta=\frac{1}{2}$ であり、有理巾根であれば $\Sigma_\theta>\frac{1}{2}$ である。

以下 θ は有理巾根とし $r=\min\{j\in\mathbf{N}\mid\theta^j\in\mathbf{Q}\}$ と r を定め $\theta^r=p/q$ の様に $p\in\mathbf{Z}$ と $q\in\mathbf{N}$ を用いて既約分数に表すとする。

p,q がともに奇数であれば

$$\Sigma_\theta=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{|p|q+1}{|p|q-1}}$$

である。p/q の値が大きい時には Σ_θ の具体的値を与える公式が求まっている。p が奇数 q が偶数で $|p/q|\ge 9/4$ である場合と、p が偶数 q が奇数で $|p/q|\ge 4$ である場合には Σ_θ は以下の様に与えられる。

$$\sqrt{\frac{(|p|q)^I+1}{(|p|q)^I-1}v\Big(\frac{|p|-q-1}{2(|p|-q)}\Big)+\frac{2(|p|q)^I}{(|p|q)^I-1}\sum_{m=1}^{I-1}\frac{1}{(|p|q)^m}v\Big(q^m\frac{|p|-q-1}{2(|p|-q)}\Big)}.$$

ここで $v(x)=\langle x\rangle(1-\langle x\rangle)$, $I=\min\{n\in\mathbf{N}\mid q^n=\pm1 \bmod |p|-q\}$ である。この公式により、例えば以下の値を求めることができる

$$\Sigma_{\pm7/2}=\frac{1}{5}\sqrt{\frac{1294}{195}},\qquad \Sigma_{\pm9/2}=\frac{2}{49}\sqrt{\frac{18561}{119}},\qquad \Sigma_{\pm11/2}=\frac{2}{117}\sqrt{\frac{2635}{3}},$$
$$\Sigma_{\pm13/2}=\frac{1}{55}\sqrt{\frac{73250534}{95051}},\quad \Sigma_{\pm15/2}=\frac{1}{91}\sqrt{\frac{31238857842}{14877551}},\quad \Sigma_{\pm14/3}=\frac{1}{11}\sqrt{\frac{4096559910}{130691231}},$$
$$\Sigma_{\pm9/4}=\frac{1}{5}\sqrt{\frac{222}{35}},\dots$$

また、例外的な値として以下が知られていた。

$$\Sigma_2=\frac{1}{9}\sqrt{42},\quad \Sigma_{-2}=\frac{1}{49}\sqrt{910}.$$

$|p|/q$ が小さい場合について考える。まず $p/q = 13/6$ の場合は $13/6 < 9/4$ であるが上記公式は成り立ち、

$$\Sigma_{\pm 13/6} = \frac{2}{7}\sqrt{\frac{237}{77}}$$

が得られ、上の公式の閾値は限界に達していない。
以下、公式の成立しない公比の例を列挙する。
Type II

$$\begin{aligned}
\Sigma_{4/3} &= \sigma_{4/3}\Big(\frac{3}{4^2-3^2}\Big) = \frac{18}{7}\sqrt{\frac{117609}{2985983}},\\
\Sigma_{8/3} &= \sigma_{8/3}\Big(\frac{24}{8^2-3^2}\Big) = \frac{2}{275}\sqrt{\frac{1576677892630126830513199442222}{32159909742724829389686571}},\\
\Sigma_{10/3} &= \sigma_{10/3}\Big(\frac{40}{10^2-3^2}\Big) = \frac{6}{637}\sqrt{\frac{43479927170}{14877551}},\\
\Sigma_{12/5} &= \sigma_{12/5}\Big(\frac{55}{12^2-5^2}\Big) = \frac{2}{119}\sqrt{\frac{\begin{array}{l}201428358526705877909161869599911562733573899\\ 35684732999641319454307059909247205938048130\end{array}}{\begin{array}{c}22452257707354557240087211123792674815 99999\\ 99999999999999999999999999999999999999999999\end{array}}},\\
\Sigma_{17/8} &= \sigma_{17/8}\Big(\frac{101}{17^2-8^2}\Big) = \frac{2}{675}\sqrt{\frac{297249806999320768019188023152135431220424628 3}{10412755085383380998588073777528906276463 5}}.
\end{aligned}$$

Type III

$$\Sigma_{19/10} = \sigma_{19/10}\Big(\frac{2879}{19^3-10^3}\Big) = \frac{2}{17577}\sqrt{\frac{\begin{array}{l}164976744723844487453892396181253653 89\\ 890036803627496132283803002858444883 5\end{array}}{\begin{array}{c}853580066285908203872257479281234 4\\ 200037037037037037037037037037037\end{array}}}.$$

Type IV

$$\begin{aligned}
\Sigma_{12/7} &= \sigma_{12/7}\Big(\frac{8717}{12^4-7^4}\Big)\\
&= \frac{1}{18335}\sqrt{\frac{1288914789424650371352900618359881195696318380071236938}{152301038780983553895924756542673273316819599 35}}.
\end{aligned}$$

Type V

$$\Sigma_{8/5} = \sigma_{8/5}\Big(\frac{13690}{8^5-5^5}\Big) = \frac{1}{326073}\sqrt{\frac{\begin{array}{l}2693647024766931825274236270928683791\\ 388436386344146949339630859940359610\end{array}}{\begin{array}{c}99911224761539601215386446280 99\\ 17355371900826446280991735537 19\end{array}}}.$$

Type VI

$$\Sigma_{3/2} = \sigma_{3/2}\Big(\frac{277}{3^6-2^6}\Big) = \frac{2}{665}\sqrt{\frac{305671451762616889661445636790873}{1031442479849053554617194905 5}}.$$

2. 研究の目的
間隙級数の方法を用いて典型的な数列に対して discrepancy の漸近挙動を完全に決定することである。また、多次元の数列に関しての研究をすすめることである。

3. 研究の方法
discrepancy を単位区間内の有限個の点を端点にもつ有限個の区間に限定した最大値により得られる量とそこで用いられた点の間に限定し取った上限の二つの量に分解して評価する discrepancy splitting の手法を徹底的に応用し評価して行く。
また、martingale 近似による概不変定理の導出により、重複対数の型の定理を導く。
得られた重複大数の法則における定数を記述する級数の精密な解析を行い定数を具体的に決定する。

4. 研究成果
(1) 等比数列 $\{\theta^k x\}$ を一般の列 γ_k を用いて摂動した場合の研究。
γ を無理数として無理数回転 $\{k\gamma\}$ で等比数列を摂動した場合、

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{ND_N(\{\theta^k x + \gamma_k\})}{\sqrt{2N \log\log N}} = \frac{1}{2} \quad \text{a.e.} \tag{1}$$

となり、独立の場合と同様に見えるという現象について以前報告している。
一般の数列で摂動する場合を考える。ある定数 $\Sigma_{\theta,\{\gamma_k\}} \in [\,1/2, \Sigma_{|\theta|}\,]$ が存在して

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{ND_N(\{\theta^k x + \gamma_k\})}{\sqrt{2N \log\log N}} = \Sigma_{\theta,\{\gamma_k\}} \quad \text{a.e.} \tag{2}$$

が成り立つ。
この定数を $\{\gamma_k\}$ を実数列全体を動かして集めた集合は $[\,1/2, \Sigma_{|\theta|}\,]$ と一致する。この様に摂動を無理数回転に限らず一般にすることにより徐々に独立の場合に連続的に近づけることが可能であることが解明された。

(2)　等比数列 $\{\theta^k x\}$ の部分列の部分列に関する研究。
以前の研究に於いて等比数列の部分列の差異量も重複大数の法則に従うことが示されそこに現れる定数は $[\,1/2, \Sigma_{|\theta|}\,]$ に含まれ、部分列全てについて定数を集めた集合は $[\,1/2, \Sigma_{|\theta|}\,]$ と一致することが示されている。
部分列を取ることにより定数は減少しているわけであるが、さらに部分列を取ればさらに定数は減少するであろうか、部分列のヒエラルキーに応じて定数にもヒエラルキーが存在するか、という問題が考えられる。
今回の研究で示されたことは、等比数列の部分列であって、定数が 1/2 と最小のものの中に、さらに部分列を取ると、差異量の重複大数の法則に現れる定数が $[\,1/2, \Sigma_{|\theta|}\,]$ に属する任意の値とすることができるものが存在することである。つまり上述のヒエラルキーが定数の世界には存在しないことが示されたわけである。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計2件（うち査読付論文　2件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　2件）

１．著者名 Fukuyama K.、Suzaki K.	４．巻 42
２．論文標題 Metric Discrepancy Results for Subsequences of Geometric Progressions	５．発行年 2021年
３．雑誌名 Lobachevskii Journal of Mathematics	６．最初と最後の頁 3123～3126
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1134/S1995080222010085	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

１．著者名 Fukuyama K.	４．巻 164
２．論文標題 The law of the iterated logarithm for the discrepancy of perturbed geometric progressions	５．発行年 2021年
３．雑誌名 Acta Mathematica Hungarica	６．最初と最後の頁 157～177
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s10474-020-01120-8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

〔学会発表〕　計0件

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関