

令和 6 年 9 月 6 日現在

機関番号：33910

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2019～2023

課題番号：19K03523

研究課題名(和文)放物型方程式のポテンシャル論的および関数空間論的研究

研究課題名(英文) Potential theory for parabolic equations and related function spaces

研究代表者

西尾 昌治 (Nishio, Masaharu)

中部大学・理工学部・教授

研究者番号：90228156

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：当研究において、熱方程式およびそこから派生し一般化された線形放物型方程式に対し、ポテンシャル論的手法および関数空間論的手法を用いて解析を行なった。方程式としては、分数冪を用いた放物型作用素の有限回繰り返しを考えることとし、それをもとにした関数空間としては、ベルグマン形空間とブロッホ型空間が主な研究対象である。今回は繰り返しの回数は2回にとどまったが、徹底的に解析することによって一般化への手がかりを得ることができた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

一般的に言って、関数の性質を調べるとき、性質のよくわかった、あるいは良い性質を持った関数で近似することによって目的に到達しようと考えすることは非常に有効である。今のところ我々の研究においては2回の繰り返しにとどまっているが、この回数をふやしていくことによって関数空間は大きくなり、関数を近似する目的に適うものが得られることが期待される。もう一つの視点は、分数べき放物型作用素とラプラス作用素との関連で、これはポテンシャル論的に興味深い問題である。

研究成果の概要(英文)：In the present research, we studied the heat equation and more general linear parabolic equations by using potential theory and function space theory. We considered spaces of solutions of such parabolic equations on the upper half space, which are analogue of Bergman spaces and Bloch spaces. Hence, we established a reproducing property for functions in the space induced by two parabolic Bloch spaces with application to the dual space of bi-parabolic Bergman spaces.

研究分野：ポテンシャル論

キーワード：熱方程式 ベルグマン空間 再生核 ジャンプ過程 多調和関数 多放物型関数 双対空間 ブロッホ空間

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

ポテンシャル論は、リーマン面上の解析関数の存在に関してラプラス方程式のディリクレ境界値問題の解の存在と一意性の研究などから進展してきた。近年では、マルコフ過程などの確論との密接な関係からの寄与もあり、複素函数論、確率論、リーマン幾何学、関数空間論などの分野が交錯する研究分野として発展してきた。また、ポテンシャル論の研究対象としては放物型方程式もラプラス方程式などの楕円型方程式と同様に興味深い対象である。

これまでの研究においては、非常に特殊な状況における熱方程式に関する正值解の構造が定義域の理想境界の理論との関連での研究が進められていた。また、理想境界の一つであるマルチン境界に関してはラプラシアンでなく分数冪ラプラシアンに対する研究が進展してきていた。その放物型版の研究にとりかかることは自然な流れと言える状況であった。

そして、解のなす関数空間としてわれわれが導入し研究してきた放物型ベルグマン空間や放物型ブロッホ空間に関しては、再生公式、双対空間、射影の有界性、調和双対の概念の一般化と有界性などの研究が進展し、放物型作用素を繰り返し作用させることに対応した多放物型関数の空間の研究に取りかかり始めたところであった。もっと具体的には、半空間において、重みがない場合の多放物型ベルグマン空間を導入し、その再生核および再生公式の明示的表示の研究、そして、その多調和ベルグマン空間の研究への応用が研究されていた。

また、多調和ベルグマン空間の研究に関しては、放物型方程式からではなく複素函数論からのアプローチもあり、ポリアナリティックベルグマン空間からの応用として研究が進んでいる。この空間は放物型作用素の繰り返しではなく、コーシー・リーマン作用素の繰り返しを考えて構成されるもので、その上のテープリッツ代数に関するものなど深い研究が進んでいる。調和関数の空間への応用は、その手法の点から実 2 次元の場合に限られるものの、高次元化を考える上で参考にするべき状況にあるといえる。

2. 研究の目的

上記背景のもと、本研究の目的は、放物型方程式に関して、解空間の構造と底空間の幾何学的状況などとの関係を解の積分表示などポテンシャル論的手法を用いて詳細に解析し、さらに関数空間論的考察を加えることである。本研究における対象の放物型方程式は、不定軽量も視野に入れた多様体上の熱方程式、およびそのイテレーション、そして分数ベキラプラシアンを含むジャンプ確率過程に対応した放物型擬微分方程式である。また、解析対象の関数空間としては、ベルグマン型空間およびブロッホ型空間である。もちろん、それ等の研究を通して、調和関数や多調和関数の空間に関する知見を得ることも重要な目的の一つである。

もう少し具体的に述べたい。これまでのわれわれの研究の流れから、本研究で特に力を入れて取り組むべきと考えていたものは、放物型ベルグマン空間、放物型ブロッホ空間および多放物型ベルグマン空間の関数空間としての性質の解明、特に再生核が存在するかどうか、そして存在するならばそのできるだけわかりやすい具体的表示および、その境界挙動、さらにその応用としての双対空間の具体的実現である。さらに研究を進めていくために導入されるであろういくつかの関数空間の最適な定義の追求、すなわち単に技術的な理由で設定したのではなく定義が自然であることを保証する様々な方面からの特徴づけの探求が重要なテーマである。

そのためには、関数空間の間の作用素が本質的な役割を果たすと考えられる。特に、テープリッツ作用素とハンケル作用素およびそこから派生する様々な作用素は基本的であろうと思われる。ただし、それらの作用素をどう定義するのかということから始める必要がある。問題は単純ではない。古典的な単位円板上の正則関数からなるブロッホ空間を例にとれば、反正則関数をシンボルとする重みつきベルグマン空間上のハンケル作用素やリトルハンケル作用素の有界性によってシンボルの複素共役がブロッホ空間に属することが特徴付けられることが知られているが、状況は、重みや可積分指数が複雑に絡み合った微妙なもので細心の注意が必要になる。われわれの場合にこれらの状況を整理し放物型方程式の本質にこの方面から迫ることが、本研究の目的と言える。

3. 研究の方法

まず、研究経費の支出についてであるが、数学においては研究を進めるためには他の研究者との研究連絡をこまめに取ることが、文献の調査とともに必要不可欠である。したがって、本研究においては研究費の大半は旅費に充てられることとなった。また物品費としては、図書およびコンピューターの購入のために使用した。

次に、研究へのアプローチの方法について研究分担者の役割分担とともに述べる。

まず、放物型方程式の正値解の空間の研究については、解を保つ変換の研究として、下村勝孝が担当した。多様体が不定計量になる場合も視野に入れ、変換の決定問題解決のため等角写像の研究から始めることとなった。

次に、多熱方程式の研究については、研究代表者の西尾昌治と研究分担者の下村勝孝に加えて、岐阜大学の菱川洋介、山田雅博を研究協力者として迎え、共同研究として進めた。解のなす関数空間の構造の解明のため、まずは再生公式とその応用としての双対空間の研究を作用素の 2 回の繰り返しから始めることにした。

最後に、分数ベキラブラシアンを含む放物型擬微分方程式の研究では、確率論的な立場からの研究は研究分担者の竹内敦司が担当した。また、関数空間論的な立場からの研究では、研究分担者の下村勝孝、研究協力者の菱川洋介、山田雅博とともに研究代表者の西尾昌治が放物型プロッホ空間の性質、特に、再生核、同型対応、双対性、可積分性などについて精査するところから始めた。また、調和関数との関連は、問題意識として重要であると認識しており、研究が節目を迎えるたびに検討することとした。

4. 研究成果

当研究においては、大まかに次の 3 つの研究テーマに基づいて研究が進められた。1 つ目は「放物型方程式に関する理想境界に関する研究」2 つ目は「多重放物型方程式に関する研究」そして 3 つ目は「放物型ベルグマン空間、放物型プロッホ空間などの放物型方程式の解のなす関数空間および関連する作用素に関する研究」である。以下、各研究テーマごとの研究成果を今後の課題とともに述べる。

第 1 の放物型方程式に関する理想境界に関する研究では、基礎となる熱方程式について、その解を保つ変換の研究を分担者の下村勝孝が中心となって進めてきた。研究開始当初の問題意識はラブラシアンが不定計量の場合も含め変換の形を決定することにあつた。その解決にはいたらなかったものの時間変換の部分に関しては、全ての有理関数が変換の対象になりうるということが明らかになった。また、ペイトマン型の空間変換を持つカロリックモルフィズムが存在するかどうかをある対称性を持つ計量に対して考察した。

第 2 の多重熱方程式については放物型方程式を熱方程式から擬微分方程式に少し一般化して関数空間を設定した。研究開始年度には半空間上の重みつきベルグマン型空間の考察を行い、再生核、双対空間に関する結果が得られた。その結果は国際会議で発表することとなった。次にプロッホ空間が問題になったが、なかなか進展せず一般の場合は半分の結果にとどまっていた。そこで作用素の繰り返しの回数を 2 回に限定して考察した結果、再生公式を得ることができ、さらに双対空間が決定された。これらの結果は 2021 年に論文発表をおこなったが、その双対空間実現の対応には少し不満が残った。そこで、さらにこの方向で研究を進め、最終年度の 2023 年に自然な形で双対空間を与えることができた。しかしそのために確立した再生公式は核がない人工的なものになってしまった。このあたりのからくりを解明し、作用素の繰り返しの回数を一般にすることが今後の課題として残されることになった。

最後に、分数ベキラブラシアンを含む放物型擬微分方程式の研究では、研究分担者の竹内敦司はジャンプのある確率微分方程式の研究を進め、リーマン多様体上の解の部分積分公式や勾配公式、漸近展開に関する結果を得た。また、放物型方程式の解の空間の一つであるプロッホ空間に属する関数に対する分数冪微分に関しては、可積分性を考慮すると現れる指数に関する条件が悪く、それが前項で述べた作用素の繰り返しの回数 2 回の制限がかかる技術的な障害になっている。さらに、目的の一つである半空間上の調和プロッホ空間との関連が調和ベルグマン空間の場合より弱く、更なる研究の進展に期待したいところである。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計15件（うち査読付論文 12件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 4件）

1. 著者名 A. Takeuchi	4. 巻 61
2. 論文標題 Wasserstein distance on solutions to stochastic differential equations with jumps	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Osaka Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 M. Hayashi, A. Takeuchi and M. Yamazato	4. 巻 167
2. 論文標題 Space-time boundedness and asymptotic behaviors of the densities of CME-subordinators	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Stochastic Processes and their Applications	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Y. Hishikawa, M. Nishio, K. Shimomura and M. Yamada	4. 巻 55
2. 論文標題 A remark on the dual spaces of bi-parabolic Bergman spaces	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Math. J. Ibaraki Univ.	6. 最初と最後の頁 1-16
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.5036/mjiu.55.1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 A. Takeuchi	4. 巻 463
2. 論文標題 Remark on asymptotic expansion of solutions to stochastic differential equations with jumps	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 The Institute of Statistical Mathematics Cooperative Research Report	6. 最初と最後の頁 52-60
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yosuke Hishikawa, Masaharu Nishio, Katsunori Shimomura, Masahiro Yamada	4. 巻 51
2. 論文標題 Function spaces induced by two parabolic Bloch spaces	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Hiroshima Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 247 ~ 265
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.32917/h2020031	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Katsunori Shimomura	4. 巻 53
2. 論文標題 Rational function and time transformation of caloric morphism on semi-euclidean spaces	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Mathematical Journal of Ibaraki University	6. 最初と最後の頁 35 ~ 42
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.5036/mjiu.53.35	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Masaharu Nishio, Katsunori Shimomura	4. 巻 23
2. 論文標題 Reproducing property for iterated parabolic operators of fractional order	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Mathematical Reports (Bucuresti)	6. 最初と最後の頁 211 ~ 226
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hirotaka Kai, Atsushi Takeuchi	4. 巻 2
2. 論文標題 Integration by Parts Formula on Solutions to Stochastic Differential Equations with Jumps on Riemannian Manifolds	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Stochastic Analysis	6. 最初と最後の頁 1 ~ 10
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.31390/josa.2.3.12	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Hiroataka Kai, Atsushi Takeuchi	4. 巻 26
2. 論文標題 Gradient formulas for jump processes on manifolds	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Electronic Journal of Probability	6. 最初と最後の頁 1 ~ 15
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1214/21-EJP660	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Kusumoto Hideaki, Takeuchi Atsushi	4. 巻 23
2. 論文標題 Remark on rates of convergence to extreme value distributions via the Stein equations	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Extremes	6. 最初と最後の頁 411 ~ 423
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10687-020-00380-5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Takeuchi Atsushi	4. 巻 434
2. 論文標題 Gradient formula for jump processes on Riemannian manifolds	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 The Institute of Statistical Mathematics Cooperative Research Report	6. 最初と最後の頁 60 ~ 66
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Takeuchi Atsushi	4. 巻 433
2. 論文標題 Rates of convergence of extreme value distributions via the IBP formulas	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 The Institute of Statistical Mathematics Cooperative Research Report	6. 最初と最後の頁 84 ~ 90
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 K. Shimomura	4. 巻 51
2. 論文標題 Existence and non-existence of caloric morphisms with Bateman space-mapping for radial metrics	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Mathematical Journal of Ibaraki University	6. 最初と最後の頁 1-12
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 A. Takeuchi and H. Tsukada	4. 巻 37
2. 論文標題 Remark on path wise uniqueness of stochastic differential equations driven by Levy processes	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Stochastic Analysis and Applications	6. 最初と最後の頁 155-170
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1080/07362994.2018.1541750	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 A. Takeuchi	4. 巻 145
2. 論文標題 Integration by parts formulas for marked Hawkes processes	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Statistics and Probability Letters	6. 最初と最後の頁 229-237
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.spl.2018.10.003	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計13件 (うち招待講演 4件 / うち国際学会 4件)

1. 発表者名 西尾昌治
2. 発表標題 多重放物型ベルグマン空間
3. 学会等名 第65回函数論シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 下村勝孝
2. 発表標題 A remark on the dual spaces of bi-parabolic Bergman spaces
3. 学会等名 ポテンシャル論研究集会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 竹内敦司
2. 発表標題 Remark on asymptotic expansion of solutions to jump-type stochastic differential equations
3. 学会等名 研究集会「マルコフ過程とその周辺」
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 竹内敦司
2. 発表標題 Remark on asymptotic expansion of solutions to stochastic differential equations with jumps
3. 学会等名 統計数理研究所共同研究集会「無限分解可能過程に関連する諸問題」
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 下村勝孝
2. 発表標題 半Euclid空間上のcaloric morphismの時間変換と実有理関数
3. 学会等名 日本数学会2022年度年会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Atsushi Takeuchi
2. 発表標題 Jump-type stochastic differential equations on manifolds
3. 学会等名 MFO-RIMS Tandem Workshop "Nonlocality in Analysis, Probability and Statistics" (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 菱川洋介, 西尾昌治, 下村勝孝, 山田雅博
2. 発表標題 Function spaces induced by two parabolic Bloch spaces
3. 学会等名 日本数学会2021年度年会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 竹内敦司
2. 発表標題 Wasserstein distance of solutions to stochastic differential equations with jumps
3. 学会等名 日本数学会2021年度年会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Masaharu Nishio
2. 発表標題 Weighted Bergman type spaces for the iterated parabolic operators of fractional order
3. 学会等名 15th Romanian-Finish Analysis Seminar (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Masaharu Nishio
2. 発表標題 Reproducing properties and function spaces for parabolic operators of fractional order
3. 学会等名 The Ninth Congress of Romanian Mathematicians (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 下村勝孝、西尾昌治
2. 発表標題 Reproducing property for iterated parabolic operators of fractional order
3. 学会等名 日本数学界 2019 年度秋季総合分科会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 下村勝孝
2. 発表標題 Caloric morphism - 熱方程式の解を保つ変換
3. 学会等名 日本数学界 2019 年度秋季総合分科会, 特別講演 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Atsushi Takeuchi
2. 発表標題 Integration by parts formulas on marked Hawkes processes
3. 学会等名 Workshop on Stochastic Analysis and Applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 A. Kohatsu-Higa and A. Takeuchi	4. 発行年 2019年
2. 出版社 Springer	5. 総ページ数 355
3. 書名 Jump SDEs and the Study of Their Densities - A Self-Study Book -	

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	下村 勝孝 (Shimomura Katsunori) (00201559)	茨城大学・理工学研究科(理学野)・教授 (12101)	
研究分担者	竹内 敦司 (Takeuchi Atsushi) (30336755)	東京女子大学・現代教養学部・教授 (32652)	

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	山田 雅博 (Yamada Masahiro)		
研究協力者	菱川 洋介 (Hishikawa Yosuke)		

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------