

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 6 年 5 月 28 日現在

機関番号：32642

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2019～2023

課題番号：19K03528

研究課題名（和文）可積分系のタウ関数と代数曲線

研究課題名（英文）Tau functions of integrable systems and algebraic curves

研究代表者

中屋敷 厚（Nakayashiki, Atsushi）

津田塾大学・学芸学部・教授

研究者番号：10237456

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,000,000円

研究成果の概要（和文）：KP方程式は浅水波の方程式で、準周期解とソリトン解は多様な解の中でも特に興味のある2つのクラスの解である。準周期解は非特異代数曲線のテータ関数と呼ばれる関数を用いて記述される。本研究では、非特異代数曲線が、特異点を持つ代数曲線に退化するのに伴う準周期解の退化とそのソリトン解との関係について研究し次のような結果を得た。つまり準周期解の極限は、特異点を持つ代数曲線の特異点を解消して得られる非特異代数曲線に対応する別の準周期解に、KP階層の頂点作用素と呼ばれる1980年代に伊達、神保、柏原、三輪により導入された作用素を作用させて得られる。

研究成果の学術的意義や社会的意義

ここ20年間の研究で、KP方程式のソリトン解についての認識は一変し、多様な網目状の形状があり得ること、および、そのような解は現実に浜辺などで観測されることなどが分かってきた。準周期解は、周期無限大の極限でソリトン解になると考えられており、ソリトン解についての新しい認識をもとに、その形状を調べることは興味ある問題である。本研究の結果は、準周期解の中にソリトン解の形状が埋まっていることを示唆しており、準周期解の形状について重要な知見を与えるものである。数学的には、代数曲線のテータ関数のある種の極限の形状を特定したことになり、テータ関数論、代数幾何学の観点からも興味のある結果である。

研究成果の概要（英文）：KP equation is an equation which describes shallow water waves. Quasi-periodic solutions and soliton solutions are especially interesting two class of solutions among various solutions of the KP equation. Quasi-periodic solutions are described by theta functions of non-singular algebraic curves. We study the limits of quasi-periodic solutions when non-singular algebraic curves degenerate to curves with singular points. We have obtained the following results. A certain class of limits of quasi-periodic solutions are obtained by the action of the vertex operators of the KP hierarchy introduced by Date-Jimbo-Kashiwara-Miwa in 80s.

研究分野：可積分系

キーワード：KP方程式 特異代数曲線 ソリトン 準周期解 テータ関数 頂点作用素 佐藤のグラスマン多様体 浅水波

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

様式 C - 19、F - 19 - 1 (共通)

1. 研究開始当初の背景

非特異代数曲線に対応するKadomtsev-Petviashvili (KP) 方程式の解の退化や多変数シグマ関数の退化構造を調べるのに、佐藤のグラスマン多様体による解析方法が有効であることが、いくつかの具体例の研究を通して確認されていた。また、Korteweg-de Vries (KdV) 方程式の相関関数の研究に関連して、KdV方程式の一般解を、代数曲線に対応した解で近似するというDubrovinらによる結果も発表されており、KP方程式の解を代数曲線の観点から見直すべき時期に来ていた。そのため、佐藤のグラスマン多様体による方法をさらに発展させ、KP方程式の解と代数曲線の関係についてさらに研究を発展させることが期待されていた。

2. 研究の目的

KP方程式のソリトン解の波動形状は、従来考えられていたものより、はるかに多様な形状をしていること、および、その波動形状は非負グラスマン多様体の組合せ論的構造で記述されることが、過去20年間の研究で明らかになった。ソリトン解は、非特異代数曲線に対応する解(準周期解)の周期無限大の極限と考えられることから、準周期解の構造も、ソリトン解の多様な構造を反映した興味深いものであることが期待される。本研究の目的は、準周期解の構造をソリトン解の新しい構造をもとに理解することである。具体的には、非特異代数曲線の様々な退化に伴う準周期解の退化を調べ、退化解とソリトン解との関係を付けることを目的とする。

3. 研究の方法

非特異代数曲線に対応するKP方程式の解は、代数曲線のテータ関数を用いて記述される。テータ関数は代数曲線の周期行列を用いて定義される。従って、代数曲線の退化に伴う解の退化を調べるには、周期行列の極限を調べる必要がある。しかし、周期行列の極限を調べるのは一般には難しい問題である。一方、代数曲線のデータを佐藤のグラスマン多様体に埋め込むと、それを利用して代数曲線の退化に伴う解の退化等を、周期行列を経由することなく、代数的に調べることが可能となる。これは、本研究に至る研究で、具体例を用いて確認されてきた方法である。そこで本研究においては、佐藤のグラスマン多様体を用いた方法をさらに発展させ、代数曲線の退化に伴うKP方程式の解の退化について研究する。

4. 研究成果

研究期間の前半では、佐藤のグラスマン多様体と多変数シグマ関数を用いて、奇数次の超楕円曲線および、 $(3, s)$ 曲線と呼ばれる、射影直線の3重被覆となる代数曲線の、分岐点を合流させる退化に伴うKP階層の解の退化について研究した。その成果は次の通りである。佐藤のグラスマン多様体の構造を用いて、まず、解の退化極限を、退化した代数曲線を非特異化した非特異代数曲線に対応するKP階層の解を用いて表示する公式を導いた。これは、解の級数表示の間の関係式になる。この関係式を、多変数シグマ関数で書き直すことにより、解の解析的な関係式を導出した。結論として、非特異代数曲線に対応するKP方程式の解の退化は、退化した代数曲線の非特異化である非特異代数曲線のシグマ関数と指数関数の積の和として表示されることが分かった。

シグマ関数やテータ関数で表示される解には、ゲージ変換と呼ばれる、指数関数を掛ける不定性がある。このゲージ因子のある標準的な形にとり、超楕円曲線の場合の公式を書き直してみると、退化した解はDate-Jimbo-Kashiwara-Miwaによって1980年代に導入されたKP階層の頂点作用素を種数の小さい非特異代数曲線に対応する解に作用させた形になっていることが判明した。これは当初予想していなかった現象で、代数曲線の退化に伴うKP方程式の解の退化は、適当な非特異代数曲線に対応する解に頂点作用素を作用させた解として記述されるのではないかと予想に導かれることになった。

そこで、話を逆転して、研究期間の後半では、非特異代数曲線に対応するKP階層の解に、頂点作用素を作用させた解を考え、それが特異点を持つ代数曲線に対応する解になっていることを証明した。ここで現れる特異代数曲線は、最初の非特異代数曲線上の何点かを同一視して得られるもので、特異点を解消するともとの非特異代数曲線になる。最初の非特異代数曲線として射影直線をとると、ロンスキー行列の方法で得られる一般のソリトン解が得られる。ソリトン解が射影直線のいくつかの点を同一視して得られる特異有理曲線から構成されることは伊達の構成法として知られていた。上記の結果は、それを種数の高い代数曲線の場合に拡張したものであるということも出来る。特異代数曲線は非特異代数曲線の退化極限と考えられることから、ここで得られた結果はまた、先に述べた予想がある意味で正しいことを示したものであると考えることが出来る。

さらに、頂点作用素の作用により得られた解は、最初にとった非特異代数曲線に対応する準周期解を背景とする、ソリトン解であることも分かり、コンピュータシミュレーションによる確認

も行った。これから、研究期間後半で得られた結果はまた、準周期解の中に、様々なソリトン解の形状が埋まっていること示唆するものであり、今後準周期解の形状を決定する際に重要な役割を果たすものと期待される。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Atsushi Nakayashiki	4. 巻 111
2. 論文標題 Tau functions of $(n,1)$ curves and soliton solutions on non-zero constant backgrounds	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Letters in Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 85:1-39
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s11005-021-01411-3	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Atsushi Nakayashiki	4. 巻 38
2. 論文標題 One step degeneration of trigonal curves and mixing of solitons and quasi-periodic solutions of the KP equation	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Geometric Methods in Physics XXXVIII, workshop, Bialowieza, Poland, 2019	6. 最初と最後の頁 163-186
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Julia Bernatska, Victor Enolski, Atsushi Nakayashiki	4. 巻 374
2. 論文標題 Sato Grassmannian and degenerate sigma function	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Communications in Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 627-660
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00220-020-03704-5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計3件（うち招待講演 2件/うち国際学会 2件）

1. 発表者名 Atsushi Nakayashiki
2. 発表標題 Introduction to Sato Grassmannian and theta functions
3. 学会等名 Seminar on Abelian Functions2023（招待講演）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Atsushi Nakayashiki
2. 発表標題 Sato Grassmannian approach to degenerations of tau functions
3. 学会等名 XXXVIII Workshop on Geometric Methods in Physics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 中屋敷 厚
2. 発表標題 KP方程式の代数幾何解の退化について
3. 学会等名 非線形波動研究の多様性 (国際学会)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	綾野 孝則 (Ayano Takanori)		
研究協力者	高崎 金久 (Takasaki Kanehisa)		
研究協力者	山田 泰彦 (Yamada Yasuhiko)		

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
ウクライナ	国立大学キエフ-モヒラアカデ ミー			