

令和 6 年 6 月 15 日現在

機関番号：13101

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2019～2023

課題番号：19K03536

研究課題名(和文)バナッハ環における保存問題とジャイロ構造に関する研究

研究課題名(英文) Study on the preserver problem and the problem on gyro structures on Banach algebras

研究代表者

羽鳥 理 (HATORI, Osamu)

新潟大学・自然科学系・フェロー

研究者番号：70156363

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：Tingley問題は保存問題研究における重要課題の一つであるが、本研究を通いいくつかの新しい結果を得た：complex Mazur-Ulam propertyを導入し、円板環をはじめとする関数環がこれを有することを証明し発表した。また、ある分離条件をみたすバナッハ空間はこれを有することを証明した。単位的 $C^*$ 環の正凸錐は、本研究代表者等により定義されたgeneralized gyrovector space (GGV)であることが知られている。正凸錐上の写像についても新たな知見を得たので出版した。GGV上のMazur-Ulam定理に関して必要であった修正証明を完成した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

保存問題において等距離写像については多くの数学者により研究が進められている。その中でTingley問題に関して新たな知見を得られたことは大きな成果である。その中である種の分離条件に着目する方法はこの分野に新しい方法を提示しその意味で学術的な意義がある。GGVの重要な例である単位的 $C^*$ 環の正凸錐上の乗法的にスペクトルあるいはノルム等を保存する写像についてのMolnarの問いに肯定的に答えることができたことは、この方面に新たな研究の方向性を見出した点においても学術的意義が認められる。また、GGV上のgyrometric保存写像に関する定理の証明を改善することができた点も評価できる。

研究成果の概要(英文)：The Tingley problem is one of the important challenges in the study of the preserver problem, and through this research, several new results have been obtained. We introduced the concept of the complex Mazur-Ulam property and proved that function algebras including the disk algebra have this property, which was subsequently announced. Furthermore, we demonstrated that Banach spaces satisfying certain separation conditions also possess this property. It is known that the convex cone of a unital  $C^*$ -algebra is a generalized gyrovector space (GGV), a concept introduced by the representative of this study and the other. New insights into mappings on convex cones were also obtained and published. We completed the necessary modified proofs concerning the Mazur-Ulam theorem on GGVs.

研究分野：関数解析学

キーワード：保存問題 等距離写像 GGV  $C^*$ 環の正凸錐 Tingley問題

### 1. 研究開始当初の背景

バナッハ環の間の写像が各種構造或いは集合を保存するときに、その写像は他のどのような構造や集合を保存するかを問う問題や、さらにそのような写像の一般形を決定する問題を保存問題といひ古くから研究されてきた。バナッハ環の各種構造間の親和性を問う問題が保存問題である。線形性を仮定しない写像についての保存問題の研究は、Wigner による unitary or antiunitary 定理や Hua による研究など、20 世紀前半までさかのぼることができる。線形性を仮定しない写像に対する保存問題は、1960 年代の Gleason-Kahane-Zelazko の定理の拡張である Kowalski-Slodkowski の定理をきっかけとして、この 30 年ぐらゐの間に広く研究されるようになった。このような中で乗法的にスペクトルを保存する(線形性を仮定しない)写像の研究は Lajos Molnar により開始され、多くの数学者の興味を引き、Kaplansky 問題とも関係があるため、バナッハ環やその部分構造上の乗法的にスペクトルを保存する写像の代数構造やその形の決定についての研究が行われるようになった。Ungar が導入したジャイロ可換ジャイロ群がある。2014 年に Beneduci and Molnar は単位的  $C^*$ 環の正值可逆元全体はジャイロ可換ジャイロ群であることを見出した。本研究代表者と阿部敏一は一般ジャイロ空間を導入した。これはバナッハ空間の一般化であると同時に単位的  $C^*$ 環の正值可逆元全体のような線形空間ではないものもその対象として含むことを示した。さらに本研究代表者と阿部敏一は、一般ジャイロ空間の理論を用いて正值可逆元全体における等距離写像を扱う方法を発見した。

### 2. 研究の目的

バナッハ環やその部分構造における保存問題について研究を推進する。本研究では特に等距離性に着目して、距離構造を保存する写像についてその性質や形を決定することを最終的な目的とする。その際には、連続関数、リプシッツ関数、連続微分可能関数、解析関数、調和関数からなる可換バナッハ環や  $C^*$ 環などとその部分構造が主な対象とする。部分構造としては、一般線形群、単位球面、正凸錐などを中心に研究したい。単位的  $C^*$ の正凸錐は一般ジャイロ空間であるので、一般ジャイロ空間の理論を整備し、特に  $C^*$ 環の正凸錐における距離構造や各種構造を保存する写像の研究を推進する。一般ジャイロ空間における保存問題も視野に入れて、スペクトルを保存する写像について乗法的にスペクトルを保存する写像についての研究を推進する。

### 3. 研究の方法

単位的  $C^*$ 環の正凸錐が一般ジャイロ空間であることに着目して、その上の保存問題についてバナッハ環の保存問題として組織的に研究を行う。Thompson 距離に着目することが重要であるが、関連して順序を保存する写像についての知見を利用さらに拡張を行う。Thompson 距離と順序構造の関係は Molnar により研究が開始されているが、その拡張を試み、その結果を Molnar の問題をはじめとする各種保存問題の研究に応用する。スペクトルを保存する写像やスペクトルを乗法的に保存する写像の構造を詳細に調べる。等距離写像の局所性や 2 局所性について調べることを通して全射等距離写像全体の群の構造を見直す。

### 4. 研究成果

(1) 全射等距離写像の 2 局所性に関する Molnar の問題について、連続微分可能関数からなる可換バナッハ環の場合について肯定的な解答を得て大井志穂との共著論文として出版した。2 局所反射性に関する結果も得られた。得られた内容を京都大学数理解析研究所の講義録から出版した。2 局所等距離写像に関して日本数学会で講演を行った。単位的可換  $C^*$ 環に値をとる連続関数からなるバナッハ環の間の複素線形全射等距離写像に関する本研究者と大井志穂による結果の証明を改良した内容を数理研の講義録から出版した。バナッハ環の間の等距離写像が積の構造や Jordan 積の構造を保存することの重要性について、関数環研究会と京都大学数理解析研究所での研究集会で報告した。バナッハ環上の等距離写像について、それが積や Jordan 構造を保存する現象について When does an isometry on a Banach algebra preserve the multiplicative structure? のタイトルで Preserver Webinar において国際招待講演を行った。バナッハ環における等距離写像について「バナッハ環上の等距離写像」のタイトルで 2020 日本数学会年会 企画特別講演において招待講演を行った。これはバナッハ環における等距離写像についてのサーベイ講演である。

(2) アインシュタインジャイロ群における幾何平均に関する研究を行い本間拓郎との共著論文として出版した。すでに出版されていた一般ジャイロ群の間の全射ジャイロ距離保存写像を決定した結果の証明について、不備が見つかりその修正を行った。日本数学会で報告を行った。関わる論文は今後出版する予定である。

(3) バナッハ空間の幾何構造に関する Tingley 問題について関数環を含む連続関数からなる空間に対して肯定解を得たので、成果を大井志穂、新藤瑠美との共著論文として出版した。バナッハ空間やバナッハ環の部分構造としてその球面を想定して、その上の保存問題、特に距離を保存する写像についての研究が急激に盛んになってきている。これが Tingley 問題であり、40 年近くの歴史をもった数学上の未解決問題である。反例も見つかっていない。Tingley 問題に関連して関数環研究会で講演を行った。Tingley 問題に対しては正則関数からなる空間に対する初めての肯定解についての結果を公表したことになる。Mazur-Ulam property に対して complex

Mazur-Ulam property (バナッハ空間  $A$  に対して、単位球が等距離であるような任意の複素バナッハ空間  $B$  に対して単位球間の等距離写像が該当のバナッハ空間全体の間での等距離写像に拡張されるとき  $A$  は complex Mazur-Ulam property を持つという) を提唱し、さらに関数環が complex Mazur-Ulam property を持つことについて結果が得られたので単著論文として出版した。さらに京都大学数理解析研究所で行われた国際研究集会 (online) で発表した。Choquet 境界上である種の分離条件を満たすようなバナッハ空間を定義して、それが complex Mazur-Ulam property を持つことが分かったのでこれを単著論文として出版した。また、Operator theory workshop, Memphis University に招待されて The Mazur-Ulam property for some Banach spaces のタイトルで講演を行った。また京都大学数理解析研究所の共同研究において、調和関数からなるバナッハ空間における Tingley 問題に焦点をあてて、ある場合については Tingley 問題が肯定的に解決されることを発表した。

(4) 一般ジャイロ群の典型的な例である単位的  $C^*$  環の正凸錐における乗法的に、スペクトル、スペクトル半径、ノルムをそれぞれ保存する写像、また商に対して同様の量を保存する写像についての研究を行った。その中で von Neumann 環に対しては知られていて、それを一般の  $C^*$  環の場合に問うた Molnar の問題に対して肯定的な解答が得られたのでそれを大井志穂との共著論文として出版した。その際に positive semidefinite cone における順序を保存する全射の形を決定してそれを用いた。乗法的にスペクトルを保存する写像については、前述のように Molnar にさかのぼることができるが、 $C^*$  環の場合は未解決である。上記結果とその方法論はこの問題の解決に対して新たな方向性を与えたものとする。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計9件（うち査読付論文 7件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Osamu Hatori	4. 巻 B93
2. 論文標題 The Mazur-Ulam property for a Banach space which satisfies a separation condition	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 数理解析研究所講究録別冊	6. 最初と最後の頁 29 82
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Osamu Hatori and Shiho Oi	4. 巻 -
2. 論文標題 Non-linear characterization of Jordan *-isomorphisms via maps on positive cones of C*-algebras	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Acta Scientiarum Mathematicarum	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s44146-024-00140-y	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Osamu Hatori	4. 巻 265
2. 論文標題 The Mazur-Ulam property for uniform algebras	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Studia Mathematica 265 (2022), 227-239	6. 最初と最後の頁 227-239
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4064/sm210703-11-9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hatori Osamu, Oi Shiho, Shindo Togashi Rumi	4. 巻 503
2. 論文標題 Tingley's problems on uniform algebras	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Analysis and Applications	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jmaa.2021.125346	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Takuro Honma and Osamu Hatori	4. 巻 12(8)
2. 論文標題 A Gyrogeometric Mean in the Einstein Gyrogroup	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Symmetry2020	6. 最初と最後の頁 1--26
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3390/sym12081333	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Osamu Hatori and Kyohei Tanabe	4. 巻 30
2. 論文標題 Note on the proof of the existence of $D(p)$ of a theorem of Jarosz	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Nihonkai Math. J.	6. 最初と最後の頁 27--29
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Osamu Hatori and Shiho Oi	4. 巻 737
2. 論文標題 2-local isometries on function spaces	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Contemp. Math.	6. 最初と最後の頁 89--106
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/conm/737/14860	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Osamu Hatori	4. 巻 2118
2. 論文標題 Isometries on Banach algebras of $C(Y)$ -valued maps	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 京都大学数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 38--50
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Osamu Hatori	4. 巻 2125
2. 論文標題 2-local isometries on spaces of continuous functions	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 京都大学数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 28--33
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計18件 (うち招待講演 7件 / うち国際学会 3件)

1. 発表者名 Osamu Hatori
2. 発表標題 The Mazur-Ulam property for Banach spaces with a certain separation condition
3. 学会等名 6th Niigata Seminar
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 羽鳥 理
2. 発表標題 The Mazur-Ulam property for spaces of harmonic functions
3. 学会等名 日本数学会2023年度秋期総合分科会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Osamu Hatori
2. 発表標題 Tingley's problem on function spaces
3. 学会等名 京都大学数理解析研究所 共同研究 (公開型) Research on Real, Complex and Functional Analysis from the perspective of function spaces
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 羽鳥 理
2. 発表標題 関数環と鶴のおんがえし
3. 学会等名 関数環研究集会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 羽鳥 理 阿部 敏一
2. 発表標題 A Mazur-Ulam theorem on a GGV and its application
3. 学会等名 日本数学会2024年度年会
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 Osamu Hatori
2. 発表標題 The Mazur-Ulam property for spaces of continuous functions
3. 学会等名 International conference on Banach algebras and related topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Osamu Hatori
2. 発表標題 The Mazur-Ulam property for some Banach spaces
3. 学会等名 Operator theory workshop, Memphis University (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 羽鳥 理
2. 発表標題 The complex Mazur-Ulam property for C-regular spaces
3. 学会等名 日本数学会秋期総合分科会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 羽鳥 理
2. 発表標題 GGV revisited
3. 学会等名 関数環研究集会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 羽鳥 理
2. 発表標題 ときどきみかけるこんな証明
3. 学会等名 第8回山陰基礎論と数学およびその周辺の研究集会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Osamu Hatori
2. 発表標題 The Mazur-Ulam property for uniform algebras
3. 学会等名 Research on preserver problems on Banach algebras and related topics (RIMS Symposia (Open)) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年



1. 発表者名 Osamu Hatori
2. 発表標題 When does an isometry on a Banach algebra preserve the multiplicative structure?
3. 学会等名 Preserver Webinar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 羽鳥 理
2. 発表標題 バナッハ環上の等距離写像
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会 企画特別講演 (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 羽鳥 理
2. 発表標題 関数上のTingley問題
3. 学会等名 2020年度関数環研究集会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 羽鳥 理 大井 志穂
2. 発表標題 2-local surjective isometries on some spaces of continuous functions
3. 学会等名 日本数学会2019年度年会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 羽鳥 理
2. 発表標題 バナッハ環上の等距離写像について
3. 学会等名 RIMS共同研究（公開型）一般位相幾何学の発展と諸分野との連携（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Osamu Hatori
2. 発表標題 Banach algebra isometries revisited
3. 学会等名 Conference on Function Algebras 2019
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 羽鳥 理
2. 発表標題 When is a linear map Jordan?
3. 学会等名 RIMS共同研究（公開型）様々な関数空間上の等距離写像（招待講演）
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	大井 志穂  (Oi Shiho)		

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------