

令和 6 年 5 月 28 日現在

機関番号：13901

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2019～2023

課題番号：19K03539

研究課題名(和文) テンソル圏の漸近解析による対称性の変容

研究課題名(英文) Transformation of quantum symmetries based on asymptotic analysis in tensor categories

研究代表者

山上 滋 (Yamagami, Shigeru)

名古屋大学・多元数理科学研究科・名誉教授

研究者番号：90175654

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：量子対称性の変容に至る様々な問題の検討を行った。その結果、以下のことが判明した。

スケール変換の下での自由状態の極限移行の形態、超群上の状態のスペクトル解析とその連分数展開による特徴づけ、Plancherel型公式への応用、非可換積分の基礎となる線型汎関数に伴う表現の記述についてしるべき知見を得た。さらには自由群の放射表現に伴う C^* 環の原始イデアル空間について、その位相も含めた具体的な記述に成功した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

スケール変換の下での自由状態の極限移行の形態は量子状態の漸近解析の手がかりを与えるものである。また、超群上の状態のスペクトル解析とその連分数展開による特徴づけは、量子確率論における新たな方向性を示唆している。非可換積分の基礎となる線型汎関数に伴う表現の記述は、従来敬遠されがちであった、その方面への初等的なアプローチを可能にするものと期待される。自由群の放射表現に伴う作用素環の原始イデアル空間の記述は、非分離的位相の中でも従来の群表現によるものと対照的な構造を有するもので、その記述の簡明さと相まって、一定の役割を果たすものと思われる。

研究成果の概要(英文)：We have investigated a variety of basic questions on transformation phenomena in quantum symmetries. Among them, the following topics are covered with results. Under the scaling transformation, asymptotic behaviours of free states is described as approaching ground states. States of geometric series on a polynomial hypergroup is investigated and their spectrum analysis is worked out explicitly. As an application, Plancherel type decomposition is established for radial representations of free groups. Moreover the result is interpreted in terms of continued fractions and we have found that it exhibits a perturbation from the semicircular law.

In view of the role of radial representations in spectral decompositions, we focused on the description of the C^* -algebra of radial representations and found that its primitive ideal space as well as its topology was captured in a concrete way.

研究分野：量子解析

キーワード：free quantum state hypergroup radial representation

1. 研究開始当初の背景

量子対称性には様々な側面があり、群あるいはホップ代数の表現論を經由して捉えられることが多いのであるが、その背後にはテンソル圏の構造が控えていて、最近の研究においては、むしろテンソル圏そのものを量子対称性の本質であるという見方が広がりつつある。そのテンソル圏の存在形態として重要なものに双加群の作るテンソル圏があり、テンソル圏のある種の線型表現と見することもできる。実際、群の表現の作るテンソル圏を作用素環 A の作用する双加群として実現することが、群の A への双対作用を与えることと同じ内容であることが知られている。

対称性の存在に係わる基本事項の一つに、物理量の保存則の導出（ネーターの定理など）がある。これはテンソル圏の立場からは、2つの対象 X, Y のテンソル積対象 $X \otimes Y$ を第三の対象 Z と結びつけるベクトル空間 $\text{Hom}(X \otimes Y, Z)$ の存在によって保証されるものであり、これまで指摘されることのなかった見方を提供してくれる。一般に保存則は、エネルギー・運動量を始めとする連続量についても広く有効である。したがって、そのような状況をも取り扱うためには、テンソル圏を有限ないし離散的という制限から解放し、その調和解析学的構造の研究が重要な意味を持つ。

このような視点の下、相対論的量子論に現れる様々な困難（物理的に意味のある数学的なモデルが存在しないか少なくとも構成しがたいという事実）に鑑みて、対称性を専らリー群により記述する、それも幾何学的実体としての時空の存在を前提として論を組み立てるといった伝統的な手法から脱却し、直接保存則に結びつく双対的な実体としてのテンソル圏を中心に据え、時空の存在はそれを前提とせず、むしろ量子系の自由度に関する極限を統制するためのマクロパラメータの一部として発現するという立場を採る。

その上で、対称性および保存則にも配慮したテンソル圏に基づく非可換な量子系から可換ないし幾何学的な情報を抽出するという、量子化の逆の向きの創始を目標として掲げる。それに至る過程で遭遇すると考えられる個別の内容については、以下の方法の欄で具体的に述べることにしたい。

2. 研究の目的

従来、対称性の研究は、群が幾何学的空間に作用する場合を中心に行われてきた。物理的な状況において、これは時空の存在を前提として論を組み立てることに他ならない。

ここでは、発想を逆転させて、まず量子対称性の実体としてのテンソル圏から出発し、それに基づく多自由度系の極限を考え、極限を統制するマクロパラメータとして幾何学的情報を抽出する。いわば、テンソル圏による対称性および保存則に着目した形で、非可換な量子系から可換な系を導くという、逆量子化 (dequantization) のあるべき姿の探求を目標とする。

3. 研究の方法

上掲目標を実現するための研究指針について、その要点は次の通り。

1. 量子統計力学における基本的な概念の一つであるボーズ・アインシュタイン凝縮 (BEC) の発現機構をテンソル圏上の random walk と結びつけることでマクロパラメータを BEC に伴う中心環のスペクトルと捉える。
2. テンソル圏としての双加群の構成において有効であった random walk の手法を BEC 解析と結びつけることで、対称性がマクロパラメータへの群作用に変容する過程を調べる。

3. その際に、通常的手法である熱力学的極限に関するプロセスが対称性を保持しない困難を、温度スケール変換流により熱平衡状態を直接的に特徴付けるといった新たな方法で回避する。

以下、この要点をより具体的な状況に当てはめて述べてみよう。まず、連続的テンソル圏の実例として、いわゆるポアンカレ群（相対論的運動群）のユニタリー表現を Wigner-Mackey の軌道法で調べる際、通常は物理的な意味付けが可能なものとして、二葉双曲面に付随した既約表現に注目するのであるが、光速無限の極限では、これがガリレイ運動群の双対の中で無限遠方に押しやられて寄与しないという意外な事実がある。このことは、従来物理的でないという理由で排除されてきた負質量に相当する一葉双曲面に伴う既約表現も含めた表現の作るテンソル圏の重要性を示唆するものであり、これまで見過ごされていたテンソル積表現の分解問題が新たに浮上してくる。物理的な既約表現のテンソル積の既約分解については、古く Wightman や Pukanszky による結果が残されているものの、その詳細は長く失われた状態であったこともあり、申請者は最近これの復元および拡充を行なった。このうち、非物理的表現に関わる部分については、今回新たに得られたもので、これをもって連続的テンソル圏研究の嚆矢としたい。

以降、定式化の煩雑さを避けるため、離散的な状況での説明を試みる。代数的量子確率とは、概ね次のような仕組みをいう。測定対象とする量は作用素環 A の元 a で表され、代数的な意味での確率変数であると見なされる。一方、確率法則（分布）の方は、状態と呼ばれる A の線型汎関数 φ で、 $\varphi(a^*) = \overline{\varphi(a)}$, $\varphi(a^*a) \geq 0$, $\varphi(1) = 1$ を満たすもので記述される。テンソル圏においてもこれと類似の仕組みを採用することで、量子確率的な取扱いが可能となる。結果として、基本の三点ベクトル空間 $\text{Hom}(X \otimes Y, Z)$ は、作用素的なもの、内積的なもの、汎関数的なものを、 X, Y, Z の選び方次第で表すことができるようになる。その意味で、量子空間的なものである。その相互作用についての情報を担うベクトルは $\delta(\xi + \eta - \zeta)$ のようなデルタ関数的保存則を表し得るもので、場の量子論で見られる典型的な一点相互作用 $\psi^*(x)\psi(x)\phi(x)$ のフーリエ変換による書き直し（この場合はエネルギー・運動量の保存）も包摂する。従って、広く保存則を満たす相互作用を表現し得る形になっている点は、この方法の大きな特徴である。

次に、dequantization の構成であるが、Penrose による spin-network のアイデアを取り入れる。これは、基本相互作用空間とでも言うべき多数の三点ベクトル空間 $\text{Hom}(X \otimes Y, Z)$ を X, Y, Z を頂点として繋いだネットワークにおいて、予め与えられた有限個のマクロ変数を外線のパラメータ（座標系）とするものの極限を考えるというものである（図参照）。この極限の取り方およびその存在については、テンソル圏から双加群を構成する際に [HY] で開発された random walk の手法による構成が役立つであろう。それは、多角形を三角形に分割し辺の数についての極限を取るという部分因子環における構成方法をさらにランダム化したものになっていて、更なる集団化が図られている。この方法は、テンソル圏のもつ対称性の情報を最大限保つようにはしてあるものの、極限の取り方次第では対称性の一部が失われることが一般的で、これは後で述べる凝縮現象との関連を覗かせるものである。

このようにして得られたマクロパラメータ相当の可換系には、もとのテンソル圏の結合代数的性質を反映した群作用の付随することが予想される（対称性の変容）。ちょうど、群上のランダムウォークから各種境界集合への群作用が引き起こされるように。ポアンカレ群の双対からガリレイ運動群の双対への（光速無限の）極限移行も、この文脈の中で正しく理解されるものと期待される。

4. 研究成果

新型コロナウイルス蔓延という状況もあり、研究は上記目標と見通しを大きく下回るものであったが、準備その他との関連した以下の結果を得た。

2019年度は、テンソル圏の漸近解析の基礎となる研究をいくつか行なった。一つは過年度来の研究内容とも関連するもので、有限自由度 CCR 環のガウス状態から作られる表現の生成する作用素環の標準的な行列単位の構成を通じて、古典的な Stone-von Neumann の結果を補充することができた。二つ目は、同じく CCR 環の自由状態の漸近挙動に関するもので、以前、状態間の遷移確率公式を導いた際に、密度行列の冪行列のトレースに関する規格化が再び自由状態によって表されるという現象の意味を解明した。わかれば簡単なことながら、自由状態に付随したハミルトニアンの定める Gibbs 状態の温度のスケール変換が引き起こす密度行列の変換に他ならなかった。その解釈に基づき、スケール変換による低温極限が様々な真空状態に収束することを共分散形式のスペクトル作用素により具体的に記述した。三つ目は、対称性の構造を記述する上で鍵になる超群の状態についてのスペクトル解析について研究を行なった。

2020年度は、基礎的な諸問題の整理と位置づけに努めた。具体的には、非可換積分論の基盤である作用素環（とりわけフォン・ノイマン環）における順序構造の積分論において果たす役割を掘り下げ、古典的な収束定理の成り立つ仕組みを精査し、積分対象を押さえ込み級数表示により同定することができた。これは積分の完備化を最も直接的な方法で記述することを可能にするだけでなく、有用な定理の成果を部分的に取り込むことで、全体の理論構成に対する見通しを格段に良くするものである。

2021年度は、前年度からの継続として、量子確率の基礎としての測度論の整備に努めた。とくに、測度の拡張の多様性について、最大測度と最小測度およびそれらの果たす役割について整理でき、さらには出版に至ったことは幸いであった。測度の自然な拡張としては、最小測度が優れているのであるが、一方で測度論で重要な位置を占める外側度との比較においては最大測度が適切なものとなる。この両者が一致する場合がある意味望ましい状況で、それはいわゆるシグマ有限性を含むものとなっている。

これの他に2019年度で得られた量子対称性を記述する超群の状態（正定値関数）のスペクトルについての新たな知見が得られた。これは自由確率論の専門家であるお茶の水女子大の吉田裕亮氏からの指摘に端を発し、自由確率論との関連で研究がなされてきた free convolution が与える確率分布のスティルチェス変換の連分数展開の安定性に関する性質が、超群のスペクトル測度においても成り立つというものである。この連分数展開の安定性が何に由来するかは未だ謎ではあるが、連分数展開の代数構造とスティルチェス変換の正值性が両立する場合の解析を行った。

2022年度は、研究期間を延長した1年目ということで、研究のための交流が復活はしたものの未だ十分ではない状況の下、解析的というよりは、代数的なテンソル圏による対称性の準備作業を多く行った。具体的には、内部対称性の典型的な系統である A 型の単純リー環に付随したテンソル圏の構造を Kazhdan-Wenzl に沿って再検討した。その中で、テンソル圏の構成がなされているのであるが、Schur-Weyl 型定理に基づく同型構成において、変形パラメータの入れ方に不整合などところが見つかり、その修正に多くの時間を費やした。また、外部対称性というべきポアンカレ群の表現の作る圏において、既約表現のテンソル積の積分分解を物理的表現以外にも押し広げ、表現のパラメータが複雑に関与する様子を観察した。その結果、群の表現によるテンソル圏を基礎に据える困難さを実感した。

2023年度においては、前年度からの継続として、半円分布に対するずらしの操作を非可換確率の立場から見直すことを行い、それを形あるものにするために、お茶の水女子大の吉田裕亮と連絡を取り、信州大学での研究集会において発表・討論する機会を得た。

ついで、半円分布のずらしの元になった Cartier 超群のスペクトル解析の結果を数理解析研究所における共同研究の場で発表を行い、そのときの会場でのやりとりから、Plancherel 公式との関係に思ったり、arXiv での公開物の手直しに結びついた。これは自由群の場合の放射表現 (radial representation) の既約表現を与えるもので、放射表現の特別な場合である正則表現に限ったものが通常の Plancherel 公式に一致するという体裁を取るものである。

さらに、これに関連する形で、放射表現から生成される作用素環の原始イデアル空間を記述する作業に取り掛かった。そのもとになる既約表現の構成については、球関数の自由群版が古くから調べられており、それを利用することで、原始イデアル集合が具体的に得られることから、原始イデアル相互の位相関係も具体的に記述できるであろうことが見て取れる。ただ、球関数に伴う原始イデアルからの閉包に何が現れるかは別問題であり、とくにそれが全体として原始イデアル空間の中で閉じていることは明らかではない。幸い、球関数から作られる球表現については、興味深い構成による正則パラメータ表示も複数考案されていて、それらを適切に組み合わせ比較することで、当初の期待通りの結果が正しいことを確認した。

[HY] T. Hayashi and S. Yamagami, Amenable tensor categories and their realizations as AFD bimodules, *J. Funct. Anal.*, 172(2000), 19–75.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Shigeru Yamagami	4. 巻 110
2. 論文標題 Scaling flow on covariance forms of CCR algebras	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Letters in Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 371--385
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s11005-019-01221-8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yusuke Sawada and Shigeru Yamagami	4. 巻 71
2. 論文標題 Notes on the bicategory of W^* -bimodules	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Society of Japan	6. 最初と最後の頁 471--481
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計1件（うち招待講演 1件 / うち国際学会 1件）

1. 発表者名 Shigeru Yamagami
2. 発表標題 Around von Neumann's projection in Weyl algebra
3. 学会等名 Functional Analysis and Operator Algebra Seminar between JAPAN and INDONESIA（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計2件

1. 著者名 山上 滋	4. 発行年 2022年
2. 出版社 裳華房	5. 総ページ数 296
3. 書名 数学のとびら ルベーク積分と測度	

1. 著者名 山上 滋	4. 発行年 2019年
2. 出版社 共立出版	5. 総ページ数 288
3. 書名 量子解析のための作用素環入門	

〔産業財産権〕

〔その他〕

Shigeru Yamagami, An elementary but logical approach to integration, arXiv:2212.12566.
 Shigeru Yamagami, Gaussian elements in CCR algebras, arXiv:1908.10428.
 Shigeru Yamagami and Hiroaki Yoshida, On shifting semicircular roots, arXiv:2209.04585.
 Shigeru Yamagami, On a moment problem of analytic functionals of polynomial hypergroups, arXiv:1912.03895.
 Shigeru Yamagami, On the primitive ideal space of radial representations of free groups, arXiv:2404.03231.

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------