

令和 5 年 6 月 16 日現在

機関番号：14403

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2019～2022

課題番号：19K03543

研究課題名(和文)種々のマルティンゲール空間とその上の分数べき積分作用素および交換子

研究課題名(英文)Several martingale spaces and fractional integrals, commutators on these spaces

研究代表者

貞末 岳 (Sadasue, Gaku)

大阪教育大学・教育学部・教授

研究者番号：40324884

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,700,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、任意フィルトレーションのマルティンゲールに対して Besov-Triebel-Lizorkin 空間の定義を与え、基本性質を解明した。そしてマルティンゲールに対する一般化分数べき作用素と乗法作用素の交換子の Orlicz 空間上での有界性・コンパクト性について十分条件を与え、また付帯条件のもとで必要十分条件を与えた。また、Markov 半群に対しても一般化分数べき作用素の定義を与え、Orlicz 空間上での有界性を示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

マルティンゲールの実解析的な基礎理論が、再び活発に研究される時期に入った。この動向の中でマルティンゲールに対する Besov-Triebel-Lizorkin 空間に定義を与え、交換子の Orlicz 空間上での有界性・コンパクト性について進展をもたらすなど、マルティンゲールの実解析的な研究を着実に積み重ねたことが本研究の学術的意義である。

以前にもマルティンゲールの実解析的な基礎理論が活発に研究される時期があり、その時期からしばらく時を置いて、それらの基礎理論の応用が始まっている。基礎理論の充実を行った本研究は将来の応用につながる可能性が高く、それを見据えた社会的意義を持つ研究といえる。

研究成果の概要(英文)：In this study, the definition of Besov-Triebel-Lizorkin spaces for general martingales are established, and fundamental properties of these spaces has been proven. Further, sufficient conditions of boundedness and compactness for commutators of multipliers and generalized fractional integrals for martingales has been obtained. These conditions are also necessary with some additional conditions. Besides, the notion of generalized fractional integrals has been introduced for Markovian semigroups and the boundedness of generalized fractional integrals on Orlicz spaces has been obtained.

研究分野：確率解析学

キーワード：マルティンゲール 分数べき積分

## 1. 研究開始当初の背景

研究開始当初の研究動向は、マルティンゲールの実解析的側面についての基礎理論の研究が再び活発になり始めており、その流れの中で代表者は分担者の中井氏らとともに atomic なフィルトレーションを持つ場合にマルティンゲールに対する分数べき積分作用素の定義をあたえ、さらにそれを一般化したものと乗法作用素の交換子の有界性の研究を始めていた。そのため種々のマルティンゲールの空間において交換子の有界性を研究することは有望なことと考えていた。また、マルティンゲールの実解析的側面についての基礎理論においては atomic なフィルトレーションを持つ場合が先行するが、他の分野への応用まで視野に入れると連続パラメータのマルティンゲールの研究に着手すべきと考えていた。

## 2. 研究の目的

研究開始当初の目的は

- (1) 種々のマルティンゲール空間において (一般化) 分数べき積分作用素と乗法作用素の交換子の有界性・コンパクト性について十分条件を与え、さらに必要十分条件まで精密化する。
  - (2) 連続パラメータのマルティンゲールに対する Morrey 空間の定義を与え、その双対空間の同定や最大作用素の有界性などの基本性質を解明する。
  - (3) 連続パラメータのマルティンゲールに対する分数べき積分作用素の定義を与え、(2) で定義した連続パラメータのマルティンゲールに対する Morrey 空間での有界性を研究する。
- であった。とくに (2), (3) についてはマルティンゲールの実解析的側面についての基礎理論を、応用に適した形に整備することを狙いとしていた。

## 3. 研究の方法

(1) 本研究では確率論に詳しい代表者が、フィルトレーションや停止時刻等の確率論の技法を用いてマルティンゲールの性質およびマルティンゲール不等式・マルティンゲール変換を調べる部分を担当し、関数空間やその上の作用素に詳しい分担者が種々のマルティンゲール空間の適切な定式化と、その上で考えるべき作用素を選択してそれを解析するという部分を担当した。

(2) 研究の進め方については、主には代表者と分担者との間での電子メールを用いて議論をして論文を書き進め、それを学会や互いの勤務先の訪問を行って確認し、さらには直接の議論を行うことで次の研究の指針を得る、という方法をとった。この際、他の研究者から得たプレプリントなどの情報交換が、研究の指針として相当重要だった。さらに学会発表を通じて他の研究者の意見をj得て研究を進めるという方法もとった。

## 4. 研究成果

(1) マルティンゲール Besov-Triebel-Lizorkin 空間の研究を行い、論文 "Martingale Besov spaces and martingale Triebel-Lizorkin spaces" として発表した。その成果は

これまで p-adic なマルティンゲールに対するものしか定義のなかった Besov-Triebel-Lizorkin 空間を、「スケール過程」を導入し、また 2 次変分過程を用いることにより、任意フィルトレーションのマルティンゲールに対して Besov-Triebel-Lizorkin 空間の定義を与えることができた。とくにリフト写像はスケール過程から得られるマルティンゲール変換で与えた。

で定義したマルティンゲール Besov-Triebel-Lizorkin 空間について、双対空間・複素補間空間の同定を行い、対応するパラメータが通常の Besov-Triebel-Lizorkin 空間と同じものとなることを示した。また Besov 空間と Triebel-Lizorkin 空間 との関係や、パラメータが  $\infty$  となるときは Triebel-Lizorkin 空間がマルティンゲール Hardy 空間と一致することなど、これも通常の Besov-Triebel-Lizorkin 空間と同じとなることを示した。このことは で定義した空間が「マルティンゲール Besov-Triebel-Lizorkin 空間」と呼べるものとなっていることを示す。

で定義したマルティンゲール Besov-Triebel-Lizorkin 空間について、なめらかさのパラメータが正であるときには平均振動量を用いた特徴づけができることを示した。これはのちに行った交換子の研究の基盤となったものである。

フィルトレーションが atomic で、さらにレギュラー条件を満たすものであれば、スケール過程は「atom の大きさ」で与えることができる。それにより以前代表者が分担者とともに定義したマルティンゲールに対する分数べき積分作用素をマルティンゲール Besov-Triebel-Lizorkin 空間上で考察でき、有界性について以前得た結果の精密化が得られた。

である。本研究は次の研究成果 (2) に直接つながり、交換子をマルティンゲール Besov-Triebel-Lizorkin 型空間で考察することを可能にしている。とくに の平均振動量による特徴づけが、基盤となっている。

(2) 分担者の中井氏ほかもう1名と共同で、atomic なフィルトレーションを持つマルティンゲールに対する一般化分数べき積分作用素の交換子の研究を行い、論文 ” Fractional integrals and their commutators on martingale Orlicz spaces ” として発表した。その成果は

マルティンゲールに対する一般化分数べき最大作用素の定義を与え、Orlicz 空間上の有界性に関する有用な十分条件を与えた。一般化分数べき最大作用素の有界性は、とくに交換子の有界性・コンパクト性を考察する際の強力な手段となった。

一般化マルティンゲール Campanato 空間での John-Nirenberg 不等式の成立において、atomic なフィルトレーションの場合にはレギュラー条件の仮定が不要であることを示して有用性を高めた。とくに交換子の有界性・コンパクト性の条件を簡易化することができた。

マルティンゲールに対する一般化分数べき積分作用素の交換子の計算を、マルティンゲール性を有効に活用する形で行った。それにより交換子のシャープ最大関数を一般化分数べき最大作用素で各点評価する不等式を得た。このような計算と、とを合わせることにより、交換子の有界性・コンパクト性の条件として以前仮定していたフィルトレーションに対するレギュラー条件が、多くの場合で自然な仮定に吸収され、不要となることが得られた。さらに一般化シャープ最大関数を導入し、交換子に対するそれが一般化分数べき最大作用素で各点評価されることを示した。

で得られた交換子のシャープ最大関数に関する各点評価を用いて、交換子の Orlicz 空間上の有界性の十分条件を、multiplier が一般化マルティンゲール Campanato 空間に属する、という形で与えた。また、一般化シャープ最大関数に関する各点評価を用いて、交換子の Orlicz 型のマルティンゲール Besov-Triebel-Lizorkin 空間上の有界性の十分条件も、同じ形で得られた。また、フィルトレーションに対するレギュラー条件のもとで、これが必要条件であることも示した。

フィルトレーションに対するレギュラー条件のもとで、交換子の Orlicz 空間、Orlicz 型のマルティンゲール Besov-Triebel-Lizorkin 空間上でのコンパクト性については、multiplier が有限個の atom に台を持つマルティンゲールの、一般化マルティンゲール Campanato 空間内での閉包に属することが十分条件であることを示した。さらに付帯条件の下、この十分条件が必要条件にまで精密化できることを示した。

である。本論文では、業績(1)のマルティンゲール Besov-Triebel-Lizorkin 空間を Orlicz 型まで拡張することで、以前の研究で得ていた交換子の結果をこの場合にまで拡張することができ、研究の良い流れができたと感じている。またマルティンゲール性を有効に活用して交換子の計算を行ったことで、フィルトレーションに対するレギュラー条件が必要である部分と不要である部分が明確となったことも大きな成果と考えている。

(3) 分担者の中井氏ほかもう1名と共同研究を行い、論文 ” Generalized Fractional Integral Operators Based on Symmetric Markovian Semigroups with Application to the Heisenberg Group ” として発表した。その成果は

Markov 半群に対して一般化分数べき積分作用素の定義を与え、Orlicz 空間上の有界性を調べた。これまで知られている分数べき積分作用素の方法そのものでは拡張が難しかったが、そのなかで Doob の不等式を使う部分をうまく抽象化し、半群が ultra 縮小性を持つときは、Orlicz 空間における標準的な有界性を持つことを示した。

Q-等質測度距離空間における一般化分数べき積分作用素の Orlicz 空間上の標準的な有界性に関する必要条件を考察し、これまで知られている結果と合わせて有用な必要十分条件を与えた。

、 が Euclid 空間や Heisenberg 群上の Brown 運動に対する Markov 半群に適用できることを示した。とくにこのような対称性の高い空間で、一般化分数べき積分作用素の Orlicz 空間上の有界性に関する必要十分条件を得た。

である。本論文では Markov 半群に対して知られていた方法のうち、マルティンゲール理論で最も基本的な不等式である Doob の不等式を使う部分を抽象化して Orlicz 空間に適用できるようにした部分に特に意味があると考えている。それは研究当初の目的にある「マルティンゲール理論を、応用に適する形に整備する」ことの第一歩である。とくに、将来連続パラメータのマルティンゲールの理論を本格的に応用してゆく手がかりになりうるとみている。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 R. Arai, E. Nakai and G. Sadasue	4. 巻 487
2. 論文標題 Fractional integrals and their commutators on martingale Orlicz spaces	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Analysis and Applications	6. 最初と最後の頁 123991
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jmaa.2020.123991	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Gaku Sadasue	4. 巻 82
2. 論文標題 Martingale Besov spaces and martingale Triebel-Lizorkin spaces	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Scientiae Mathematicae Japonicae	6. 最初と最後の頁 57--82
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.32219/isms.82.1_57	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 K. Amagai, E. Nakai, G. Sadasue	4. 巻 27
2. 論文標題 Generalized Fractional Integral Operators Based on Symmetric Markovian Semigroups with Application to the Heisenberg Group	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Taiwanese Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 113-139
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.11650/tjm/220904	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

〔学会発表〕 計2件（うち招待講演 2件 / うち国際学会 1件）

1. 発表者名 貞末 岳
2. 発表標題 マルティンゲール空間と、分数べき積分
3. 学会等名 日本数学会（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Gaku Sadasue
2. 発表標題 Fractional integrals for martingales
3. 学会等名 International Conference on Function Spaces and Geometric Analysis and Their Applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	中井 英一  (Nakai Eiichi)  (60259900)	茨城大学・理工学研究科(理学野)・教授    (12101)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------