

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 6 年 6 月 18 日現在

機関番号：34416

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2019～2023

課題番号：19K03552

研究課題名(和文) マルコフ過程の経路及びその加法汎関数の大域的性質とその安定性

研究課題名(英文) On global properties and its stability of the paths of Markov processes and their additive functionals

研究代表者

上村 稔大 (Uemura, Toshihiro)

関西大学・システム理工学部・教授

研究者番号：30285332

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：研究成果の一つとして、飛躍型のマルコフ過程、とくに飛躍率を表す Levy 密度が原点で退化する場合や特異性を持つときに、どの程度の退化性・特異性があってもマルコフ過程が構成できるかについて検討を行った。さらには、構成ができるときに、マルコフ過程が確率1で原点に到達できるか否かの問題について一定の結果が得られた。また、生成作用素と呼ばれる $L^2$ 上の(非有界な)線形作用素の定義域が十分滑らかな関数を含むための条件についても結果を得ることができた。もう一つの研究成果としては、飛躍拡散過程に対する均質化法問題で、2-scale収束法を用いて確率過程の収束を得ることができた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

飛躍をもつマルコフ過程論の研究は、マルコフ過程論の研究そのものに対する理論的重要性もさることながら、領域に穴や隙間があり、それらの領域へ粒子が流れ込まないための条件や、逆にそこへ集約させるようにするためにどのような制御が必要かという現実的な観点から見ても重要だと思われる。また、均質化法は、偏微分方程式論や確率論だけにとどまらず、マクロな法則からミクロな法則へ変化するときの極限状況を知る上でも非常に有効な理論であり、確率過程論の収束と関連付けることで、より具体的な変化を理解することができる。

研究成果の概要(英文)：In our research, the Dirichlet form technique have been widely used to study the path properties of Markov processes we are dealing with. One of our main results is that, under appropriate conditions on the Levy densities for which the densities are allowed to degenerate or to diverge at 0, the jump-diffusion processes are constructed by using the Dirichlet form theory. Moreover the polarity of 0 is also investigated. We have also consider the homogenization of the jump-diffusion processes via a 2-scale convergence method. In particular, the method is firstly used for the jump processes in our research, which have been considered in the diffusion processes case so far. Because of the method, we have had to assume that the diffusion coefficients are continuous, but the unfolding method, instead, will handle this restriction and the result could be relaxed to the case when the diffusion processes having drift term.

研究分野：確率過程論

キーワード：ディリクレ形式 飛躍拡散過程 非局所作用素

### 1. 研究の背景

ランダムな現象を解析する数学モデルの一つとして確率過程論（特にマルコフ過程）の研究において、標本路が時間に関して不連続であるようなマルコフ過程の研究が近年盛んに研究されてきている。実際、突然の大地震など自然災害によって引き起こされる社会活動の一時停止、予測不可能な事件・事故などにより、それまでの“連続的変化”の破綻が相次いで発生する状況において、標本路が連続であるという拡散過程によるモデル化の不適合性が指摘され始めている。本研究では、積極的にその不連続な状況を土台としたモデルの構築を行い、とくに不連続な経路を持つマルコフ過程の解析を積極的に進めてきているところである。

最近では、対称安定過程、Levy 過程、及びそれらの一般化である、純飛躍型のマルコフ過程、およびそれらより構成される加法汎関数に対する確率解析の研究を行っている。

### 2. 研究の目的

本研究は、(半)ディリクレ形式の理論を援用して、対応する拡散過程、純飛躍型マルコフ過程あるいは、ジャンプ拡散過程の構成と、その標本路に対する大域的性質や、それらから構成される加法汎関数、さらにはそれに一意対応する Revuz 測度についてそれらの位相的性質を研究しようとするものである。第一には、拡散データ、飛躍率及び基礎の測度の体積の増大度の条件によってマルコフ過程の経路の保存性・再帰性の条件を導出することを試みる。また、porous media における熱の拡散や浸透圧流が、均質な物質やユークリッド空間の領域などにおけるそれとは本質的に異なることが知られているが、領域を動く粒子が飛躍を伴って移動するモデルに対してどのようなことが起きるのかについて研究を進める。特に、空間に微分構造がないような領域上の熱の伝搬などの詳しい解析は、ほぼ手つかずの状況であると思われる。そこで、まずは均質な物質上、あるいはユークリッド空間の領域上で定義される飛躍型のマルコフ過程について、均質化問題について検討する。第二は、正值加法汎関数の系列の確率過程としての収束性、詳しくは局所一様収束性の導出を対応する Revuz 測度の収束性を通じて導出することを試みる。

### 3. 研究の方法

ディリクレ形式においては、福島存在定理により、「正則性」の条件の下で、Dirichlet 形式と、強マルコフ過程、具体的には Hunt 過程とが 1 対 1 に対応することが知られている。これは、確率微分方程式や、マルチンゲール問題など、これまで知られている確率過程の構成方法と異なり、拡散係数、あるいは Levy 密度の係数の滑らかさの条件を要求しないで構成が行える利点があるため、ジャンプ拡散過程の構成を、それらの係数に対して、弱い条件のもとで構成を行う。また、構成したマルコフ過程の大域的性質の一つである保存性の導出に関しては、対称な場合に、大島の評価基準として知られている条件を、非対称な場合に拡張した上で、係数の遠方での挙動と領域の基礎の測度の体積増大度を用いて導出する。また、マルコフ過程の系列の大域的性質の安定性について、とくにポテンシャル測度が特異である場合において、対応する Dirichlet 形式に対する Mosco 収束の手法を用いて検討する。Mosco 収束は、対応するマルコフ過程の系列の有限次元分布の収束と同値であるため、その収束性の下で、マルコフ過程の経路の大域的性質が安定的かどうかを考えることになる。さらに、正則 Dirichlet 形式の正則部分空間の一意性についても検討する。

#### 4. 研究成果

主な発表論文等に行った発表論文の成果内容について順番に簡単に解説していく。

(1) 論文(“Hogenization of symmetric Lévy processes” with Rene Schilling, *Romanian Journal of Pure and Applied Mathematics*, -- Stochastic Analysis and Related Topics Nicu Boboc Memorial Volume vol. 66, 2021, 243-253)では、与えられた Dirichlet 形式の正則部分空間の系列に対応する拡散過程の系列に対する弱収束を導出した。その有限次元分布の収束の証明には、正則部分空間を特徴づける特性集合の単調性の仮定の下、Dirichlet 形式に対する、単調収束定理を用いた。

(2) 論文(“On symmetric stable-type processes with degenerate/singular Lévy densities” with Haruna Okamura, *Journal of Theoretical Probability*, vol. 34, 2021, 809-826)においては、正則で下に有界な半 Dirichlet 形式に対応するマルコフ過程のあるクラス、具体的には、(対称とは限らない)拡散過程、ジャンプ拡散過程、及び飛躍型過程を含むマルコフ過程のあるクラスに対して、統一的な手法に基づいて、それらの保存性を導出することに成功した。具体的には、基礎となる測度の体積増大度と拡散係数、あるいはLevy 密度の係数の遠方での挙動を用いて導出した。また、幾つかの具体例については既存の結果を拡張することにも成功した。

(3) 論文(“Homogenization of symmetric Dirichlet forms” with Matsuyo Tomisaki, *Journal of the Mathematical Society of Japan*, vol. 74, 2022, 247-283)では、局所的に一様楕円型の対称拡散過程、対称なLevy 過程、また対称な飛躍型マルコフ過程に対応する Dirichlet 形式のそれぞれの系列に対して、Mosco 収束するための十分条件を与えることに成功した。特にそれぞれの確率過程を特徴づける係数の系列の収束の条件として局所積分の収束性の条件を課すことだけで収束性を導出できることを示せたのは画期的な結果であると思われる。また、それにより、対応するマルコフ過程の経路の大域的性質が、Mosco 収束の下では一般に、安定的でないことが判明した。論文には、そのような例を提示した。具体的には、系列のマルコフ過程が再帰的 (resp. 過渡的、保存的) であるものの、Mosco 収束の極限として現れる確率過程が過渡的 (resp. 再帰的、保存的でない) なるような例を構成した。

(4)論文(“Criticality of Schrödinger forms and recurrence of Dirichlet forms” with Masayoshi Takeda, *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 376, 2023, 4145-4171)では、対称な純飛躍型のマルコフ過程に対応する対称 Dirichlet 形式に対する再帰性の評価基準及び関連する容量不等式を、基礎の測度に対する体積評価を用いて導出した。その上で、 $d$ 集合と呼ばれる一様に均質とは限らない領域上の純飛躍型マルコフ過程の再帰性の例をいくつか提示することに成功した

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 4件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Takeda Masayoshi、Uemura Toshihiro	4. 巻 376
2. 論文標題 Criticality of Schrodinger forms and recurrence of Dirichlet forms	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Transactions of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 4145 ~ 4171
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1090/tran/8865	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 TOMISAKI Matsuyo、UEMURA Toshihiro	4. 巻 74
2. 論文標題 Homogenization of symmetric Dirichlet forms	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of the Mathematical Society of Japan	6. 最初と最後の頁 247 ~ 283
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2969/jmsj/85268526	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Okamura Haruna and Uemura Toshihiro	4. 巻 34
2. 論文標題 On Symmetric Stable-Type Processes with Degenerate/Singular Levy Densities	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Theoretical Probability	6. 最初と最後の頁 809 ~ 826
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s10959-020-00990-6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Rene L. SCHILLING and Toshihiro UEMURA	4. 巻 66
2. 論文標題 Homogenization of symmetric Levy processes on $R^d$	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 REVUE ROUMAINE DE MATHEMATIQUES PURES ET APPLIQUES	6. 最初と最後の頁 243-253
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

[学会発表] 計9件(うち招待講演 6件/うち国際学会 5件)

1. 発表者名 Toshihiro Uemura
2. 発表標題 On H-convergence of elliptic operators with divergence-free drifts
3. 学会等名 SEMINAR SERIES ON ANALYSIS AND PDE (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Toshihiro Uemura
2. 発表標題 Homogenization of Diffusion Processes with Drifts via Unfolding
3. 学会等名 The 10th International Conference on Stochastic Analysis and its Applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Toshihiro Uemura
2. 発表標題 Some estimates of symmetric stable-type processes with singular or degenerate Levy densities
3. 学会等名 The 16th International Workshop on Markov Processes and Related Topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Toshihiro Uemura
2. 発表標題 Some estimates on symmetric stable type processes with singular densities
3. 学会等名 The MFO-RIMS Tandem Workshop "Nonlocality in Analysis, Probability and Statistics" (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Toshihiro Uemura
2. 発表標題 特異なLevy 密度を持つ対称Levy型過程について
3. 学会等名 日本数学会 2022年度年会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Toshihiro Uemura
2. 発表標題 On symmetric stable-type processes with singular/degenerate coefficients
3. 学会等名 Theory of Markov Semigroups and Schrodinger Operators, WUT, Poland (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Toshihiro Uemura
2. 発表標題 対称 Dirichlet 形式の均質化について
3. 学会等名 日本数学会年会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Toshihiro Uemura
2. 発表標題 Homogenization of Symmetric Dirichlet Forms
3. 学会等名 Japanese-German Open Conference on Stochastic Analysis 2019 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 上村 稔大
2. 発表標題 特異な、または退化する係数を持つ対称安定過程の大域的性質について
3. 学会等名 日本数学会 年会 2020
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究 分担 者	富崎 松代  (Tomisaki Matsuyo)  (50093977)	奈良女子大学・その他部局等・名誉教授    (14602)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計2件

国際研究集会 International Workshop on Stochastic Analysis and Applications	開催年 2019年～2019年
国際研究集会 International Workshop on Probability at Kansai University	開催年 2020年～2020年

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関