

令和 6 年 6 月 10 日現在

機関番号：12102

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2019～2023

課題番号：19K03558

研究課題名（和文）確率空間上の保測変換族に対する多重同時再帰性の定量的研究

研究課題名（英文）Research in quantitative aspects of multiple recurrence property of probability measure preserving transformations

研究代表者

平山 至大（Hirayama, Michihiro）

筑波大学・数理解析系・准教授

研究者番号：50452735

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,600,000円

研究成果の概要（和文）：エルゴード理論において、もっとも基本的かつ重要な性質の一つに再帰性がある。この性質は、単一保測変換の場合から保測変換族に対する多重同時再帰性へと拡張して確立されている。この多重同時再帰性の定量的側面について、一般論の探究と具体的な変換族についての評価、という相補的研究を行った。一般論に関しては、Furstenbergの意味で独立な保測変換族に対する多重エルゴード平均の二乗平均収束やKhinchine型の定量的多重再帰定理などを確立した。また、ある具体的な変換が自己結合の極小性をもつことなどを明らかにした。

研究成果の学術的意義や社会的意義

再帰性はエルゴード理論における基本的かつ重要な性質の一つであり、様々な観点から多くの研究がなされている。しかしながら、保測変換族に対する多重同時再帰性の定量的側面については、まだ明らかにされていないことが多い。この点について、本研究ではFurstenbergの意味で独立な保測変換族が呈する同時再帰時間のなす集合が、自然数全体において相対稠密であることを明らかにした（Khinchine型の多重再帰定理）。変換族が可換な場合には先行する結果があったが、本研究結果は可換とは限らない変換族にも応用をもつ点で学術的意義があると思われる。

研究成果の概要（英文）：Recurrence is considered as one of the most fundamental and important property in ergodic theory, and much research has been conducted from various perspectives. This property is extended from the case of a single transformation to multiple transformations. Regarding the quantitative aspects of multiple recurrence property, we conducted complementary research on the general theory and an investigation of specific examples. For families of probability measure-preserving transformations that are disjoint in the sense of Furstenberg, we established the mean convergence of multiple ergodic averages and the multiple recurrence result of the Khinchine type. We also showed that certain specific measure-preserving transformation has minimal self joining.

研究分野：エルゴード理論

キーワード：多重再帰定理 Khinchine型多重再帰定理 Furstenberg独立性 極小自己結合 Mobius直交性

1. 研究開始当初の背景

エルゴード理論あるいは力学系理論においてもっとも基本的かつ重要な性質の一つに再帰性がある。例えば Poincare 再帰定理は、確率空間の任意の可測集合について、そのほとんどすべての点は保測変換の反復 (Z 作用) のもと、その集合に無限回戻することを主張する。この再帰性は、変換に何らかの“混合性”をさえ課さなくとも成立することもあり、応用の範囲は広い。

さて、上述した再帰性は単一の保測変換が呈する性質である。Furstenberg と Katznelson は、再帰性の多重版として、確率空間上の可換な保測変換族 T_1, T_2, \dots, T_d に対する“同時”再帰性を確立した。すなわち、変換に共通する再帰時間が無限回存在することを示した。これはエルゴード理論的興味に加え、等差数列の存在に関する Szemerédi 定理にエルゴード理論的証明を与えた点からも意義がある。実際、エルゴード理論と数論の関係領域においては現在に至っても活発な研究がなされており、その中の際立った到達点の一つとして、例えば Green と Tao による、素数のみからなる任意長さの等差数列の存在定理がある。

単一保測変換の再帰性については、こうした定性的研究に加えて、例えば再帰時間に関する Kac 公式や Boshernitzan 評価などの定量的研究もなされている。これに対して、保測変換族の呈する多重同時再帰性の定量的側面については、変換族が可換である場合に Bergelson, Host, Kra, Leibman らによる比較的最近の興味深い研究があるものの、まだ理解の及んでいない領域が多い状況であった。また、研究代表者自身による Boshernitzan 型評価もあったが、これは大幅な改良の余地が残されていた。

2. 研究の目的

多重同時再帰性の定量的研究の先駆けとして一般論の構築に寄与すること、および具体的かつエルゴード理論において典型的な保測変換族に対する同時再帰時間についての詳細な評価を行うことを目的とする。

3. 研究の方法

単一保測変換の再帰性を定量的研究にする際、再帰時間関数が重要な役割を果たす。保測変換族の同時再帰性の定量的研究においても、まずは同時再帰時間関数を導入しこれを研究することが自然であると考えた。

さて、多重同時再帰性についての定量的性質は、本質的に対角測度の定量的側面を反映しているのではないかと考えられる。ここで対角測度について少しだけ詳しく述べることにする。確率空間 X 上に保測変換族 T_1, T_2, \dots, T_d が与えられた時、それらの直積変換 $T_1 \times T_2 \times \dots \times T_d$ が直積確率測度空間 X^d 上の保測変換として定まる。しかしながら、多重再帰問題において興味がある初期点集合 Y は、直積空間においてその対角集合に同一視される。ここに対角集合は直積測度に関して測度零であるため、直積変換の定義域を対角集合に制限して議論するという考察は測度論的に意味をなさない。そこで X 上の確率測度を対角集合へ自然に埋め込んだときの像測度として定まる対角測度を扱う方法が考えられる。対角測度は、エルゴード理論的結合の理論と親和性があり、この結合の手法を用いて一般論の探究に取り組むこととした。特に Bergelson, Host, Kra らによる冪零構造と特性因子の議論は本研究課題に密接に関係しているため、彼らの議論を検討し参考にした。

一般論の探究に並行して、具体的な保測変換族の同時再帰時間を計算することとした。特に、エルゴード理論において重要な例である加算器変換や Chacon 変換などについて計算例を提示することは、それ自体学術的意義があると思われる。これらは古典的な例であり、これまでも様々な研究がなされている。そこで関連する論文を参考に知見を深めた。また、こうした話題に詳しい研究者とも研究連絡を行うこととした。

本研究遂行に際して、国内外の研究者との研究連絡を活発に行うことで、効率よく研究を進めることとした。上にも述べたように、特にエルゴード理論の古典的な技術に関しては適切に情報収集を行うことで研究を効率的に進める工夫とした。

4. 研究成果

研究成果を 4 つの小項目に分けて記載する。

(1) 項目 1 および項目 3 で述べたように、保測変換族が可換である場合には Bergelson, Host, Kra, Leibman らによる比較的最近の研究によって Khintchine 型の多重再帰定理や多

重エルゴード平均の収束について興味深い現象が明らかにされていた。本研究成果の意義を明確にするために、彼らの結果(の一部)をごく簡単に述べる。まず Khintchine 型の再帰定理は、大雑把に言えば Poincare 再帰定理から保障される無限回の再帰時間のなす集合が、自然数全体において相対稠密であること、すなわち再帰時間どうしの間隔が一樣に有界であることを主張するものである。この意味で、無限回の再帰時間が“どれくらい無限か”について定量化した主張と考えられる。

さて、単一保測変換の Poincare 再帰定理は可換な保測変換族に対して多重化されているので、続いて Khintchine 型の再帰定理の可換な保測変換族に対する多重拡張を考えることは自然であろう。これに対し Bergelson らは、ある保測変換 T が生成する可換な変換族 T, T^2, T^3, \dots, T^d について、族の個数 d が 3 以下の場合には Khintchine 型の再帰定理の期待される自然な多重化が成立するが、 d が 4 以上の場合には、一般に自然な多重拡張は成立しないという興味深い主張を示した。ここに T^2 は T を 2 回反復合成して定まる変換であり、他も同様である。

これに対し本研究では、ある性質をみたす保測変換族 T_1, T_2, \dots, T_d については、すべての自然数 d について Khintchine 型の再帰定理の自然な多重化が成立することを明らかにした。ここで仮定された、保測変換族に対する性質とは Furstenberg により提案された独立性(排反性)である。この性質は変換族の可換性とは独立な概念である。すなわち、変換族がこの独立性をみたしていれば、それが非可換であっても Khintchine 型の再帰定理が期待される自然な定式化で成立する。またこの性質をみたす変換族は豊富に存在することも知られており、この意味で極端に特殊な状況を仮定したものではないことを注意しておく。議論の詳細を説明することは避けるが、この独立性を利用して項目 3 で述べた対角測度(の平均)の収束について調べることで、自然な定式化での Khintchine 型多重再帰定理を示すことができた。

さらに、本研究手法による副産物の一つとして、多重エルゴード平均の二乗平均収束についても成果があった。これは von Neumann による平均エルゴード定理の多重版に関する問題である。この問題に関しても、可換な保測変換族(や冪零群の保測作用)に対しては Ausitn, Host, Kra, Tao, Walsh らにより多重エルゴード平均の二乗平均極限が存在することを示す先行研究があった。ただし、これらの先行研究においては、変換にある程度の“混合性”を課さない限り、極限の具体的表示は一般に明示されない状況である。

これに対し本研究では、先述した Furstenberg の意味での独立性をみたす保測変換族に対して、多重エルゴード平均が二乗平均収束すること、およびその極限の明示公式を与えた。さらに、平均の取り方も一樣平均にまで拡張できることも明らかにした。こちらの成果においても、独立性をみたしていれば、変換族の可換性は必要ないことを注意しておく。以上の研究成果は国際共著論文として学術雑誌に掲載された。

(2) エルゴード理論において重要な例である加算器変換や Chacon 変換について、それらの同時再帰時間を詳細に計算した。このうち Chacon 変換については、再帰時間に関する Kac 型公式や Boshernitzan 型評価について興味深い現象を見つけることができた。しかしながらこの成果には発展の余地があり、本研究期間内に論文として纏めるにまでには至らなかった。今後も引き続き研究を遂行する予定である。

(3) 研究 (2) の遂行過程で、加算器変換から誘導される保測変換の中心化群を決定し、さらに当該変換が極小な自己結合をもつことを明らかにした。ここに保測変換 T の中心化群とは、変換 T と可換な保測変換族のなす群を指す。中心化群の決定問題に関しては、例えば濱地による結果や、また可微分力学系のエルゴード理論においては戸川による結果などがある。しかし一般に、与えられた変換の中心化群を決定することは容易ではない。また自己結合(の極小性)はエルゴード理論における古典的課題であるものの、現在でも、例えば区間入替変換などを対象とした興味深い研究がなされている。しかしながらやはり、具体的な変換が極小自己結合性をもつかを決定する、という先行結果はあまり多くないようである。こうした意味で、具体的な保測変換の中心化群の決定と極小自己結合性の判定を与えたことには一定の意義があると思われる。なお、この問題に取り組むにあたっては、項目 3 で述べたとおり、経験豊富な研究者たちからの情報収集が特に重要であった。この成果については現時点で論文作成中である。

(4) 上述した Furstenberg の意味での独立性に関係の深い性質として Mobius 直交性が知られている。これは変換と Mobius 関数の数論的直交性(相関の有無)に関する性質である。

特に、コンパクト距離空間上の同相写像が生成する位相力学系の枠組みでは、この直交性について Sarnak により定式化された予想があり、その解明に向けて非常に活発な研究がなされている。また確率空間上の保測変換に対する、いわばエルゴード理論的 Mobius 直交性は Sarnak 自身によって肯定的に（つまり直交していることが）解決されている。

本研究開始時点では想定していなかったが、Furstenberg の意味での独立性に関わる研究を進めていた過程で、Mobius 直交性についても国際共同研究が始まり、一定の成果を確立することができた。この成果は、Sarnak 予想そのものに直接関係するものではないが、ある意味で“真に無限な保測変換”に対する Mobius 直交性についての恐らく先駆的研究の一つではないかと思われる。この成果は国際共著論文として学術雑誌に掲載された。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 5件/うち国際共著 4件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 HIRAYAMA Michihiro	4. 巻 42
2. 論文標題 Bounds for Multiple Recurrence Rate and Dimension	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Tokyo Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 239--253
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3836/tjm/1502179281	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Michihiro Hirayama and Dong Han Kim and Younghwan Son	4. 巻 247
2. 論文標題 On the multiple recurrence properties for disjoint systems	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Israel Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 405--431
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s11856-021-2271-5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Michihiro Hirayama and Davit Karagulyan	4. 巻 78
2. 論文標題 On Mobius disjointness for infinite measure-preserving transformations	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Kyushu Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 259--289
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2206/kyushujm.78.259	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する
1. 著者名 Michihiro Hirayama and Davit Karagulyan	4. 巻 -
2. 論文標題 On the coexistence of convergence and divergence phenomena for integral averages and an application to the Fourier-Haar series	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Analysis Mathematica	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s10476-024-00010-3	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Michihiro Hirayama and Davit Karagulyan	4. 巻 -
2. 論文標題 Differentiation properties of class $L^1([0,1]^2)$ with respect to two different bases of rectangles	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s44146-024-00127-9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

[学会発表] 計4件 (うち招待講演 4件 / うち国際学会 1件)

1. 発表者名 Michihiro Hirayama
2. 発表標題 On Mobius disjointness for infinite measure preserving systems
3. 学会等名 Number Theory and Dynamics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Michihiro Hirayama
2. 発表標題 A remark on disjointness for L^2 -convergence of multiple ergodic averages
3. 学会等名 エルゴード理論とその周辺 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Michihiro HIRAYAMA
2. 発表標題 L^2 convergence of multiple ergodic averages for disjoint systems
3. 学会等名 Recent Progress in Ergodic Theory (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Michihiro Hirayama
2. 発表標題 Kakutani's example revisited
3. 学会等名 エルゴード理論研究集会（招待講演）
4. 発表年 2023年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
アルメニア	Institute of Mathematics of NAS RA			
韓国	Dongguk University	POSTECH		
スウェーデン	KTH Royal Institute of Technology			
米国	University of Maryland			