

令和 6 年 6 月 10 日現在

機関番号：15401

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2019～2023

課題番号：19K03565

研究課題名(和文) 時間依存微分方程式に対する逆問題における「局所化」による方法の可能性

研究課題名(英文) Possibility of localization methods for inverse problems of time dependent problems

研究代表者

川下 美潮 (Kawashita, Mishio)

広島大学・先進理工系科学研究科(理)・教授

研究者番号：80214633

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：物体(穴)がある領域における波動方程式において、入射波を与え、反射波を観測するという直接的な設定で穴の推定逆問題を囲い込み法により考察した。その解析において現れる指示関数の漸近挙動が問題で、既に多くの結果がある。先行研究ではディリクレ境界のみ、ノイマン型境界のみなど指示関数の漸近挙動が同符号になる場合に限定されていた。また、「局所化」の視点がないのも問題であった。本研究で、単独では指示関数の符号が異符号になる空洞が混在している場合でも取り扱いが可能になった。さらに、反射波の構成において漸近解を利用することにより、反射波については「局所化」を実行することができた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究課題は散乱逆問題の一種であり、例えば、エコーやソナーなど外部から波を入れて内部の状況を推定する状況を数学的に定式化したものに相当する。これらの道具は既に各分野で使用されているが、数学的に見た場合、観測データから何が導けるか、誤差評価はどのようにしているのか等については未知に近い状況と思われる。本研究はこのような理論的な考察に関連がある。また、数学という分野の観点から見た場合、既存の方法では扱えなかった場合の扱い方を開発し、さらに、この問題とはほとんど関連がないと思われる研究との関係を発見するなど、新たな知見を得たのも意義があることと考えている。

研究成果の概要(英文)：Scattering problems in the wave equation in a region with obstacles (cavities) are considered. The direct setup of giving an incident wave and observing the reflected wave is formulated by the enclosure method, and the inverse problem detecting the cavities is considered. The problems are to analyse the asymptotic behavior of the indicator function, and there are already many results. Prior research has been limited to cases where the asymptotic behavior of the indicator functions has the same sign, such as Dirichlet boundaries only, Neumann-type boundaries only, etc. The lack of a "localization" perspective is also a problem. This study allows for the treatment of mixed cavities where the signs of the indicator functions would be different if they stood alone. Furthermore, by using asymptotic solutions in the construction of reflected waves, we are able to perform "localization" for reflected waves.

研究分野：偏微分方程式論

キーワード：時間依存型逆問題 局所化 空洞推定 介在物推定 接合境界問題

1. 研究開始当初の背景

微分方程式論における重要な問題は多岐にわたり、数学的な研究対象に止まらず、工学などの応用面から要請される問題も多い。その中で特に数学的厳密性を兼ね備えた研究方法が要求されるものの一つに逆問題がある。ただし、ここでいう逆問題とは熱伝導現象、波動現象やそれらの定常状態など微分方程式を用いて記述されるものを指す。

本研究開始前に、本研究代表者は M. Ikehata により導入された「囲い込み法(enclosure method)」を用いて熱方程式に対する境界値逆問題や波動方程式に対する散乱型逆問題など、時間を含む微分方程式に対する逆問題について研究してきた。これらの研究を通じて、時間が入った方程式に対する逆問題については、これらをそのまま扱うより、時間変数について Laplace 変換を行なって得られるパラメータ付きの楕円型方程式を用いて元の問題を書き直してから取り扱う方が良いことが明らかになってきた。書き直された問題は本質的にはレゾルベントのスペクトルパラメータに関する漸近挙動を調べることに帰着される。ここで、「レゾルベント」という用語について述べておく。「レゾルベント」とは通常、上で述べたパラメータ付きの楕円型問題の非斉次境界値問題における解から定まる解作用素のことである。しかし、問題によっては、方程式自身は斉次方程式で、境界上においてのみデータを与えたときの解を扱う方が良いこともある。本質的にこれらの解は同義で、互いに変換が可能なので、この報告書では敢えてどちらもレゾルベントという同じ言葉遣いを用いることにする。

このレゾルベントの漸近挙動についての解析は境界値問題の場合には1960年代から考えられてきた熱方程式の短時間漸近挙動を調べる問題と密接な関係がある。それによれば、レゾルベントの漸近挙動はスペクトルパラメータを大きくしたときに指数減衰する。そのため、漸近挙動の主要部を見いだすには現れた指数関数における指数自体を調べる必要がある。この指数は主要部がスペクトルパラメータについての一次式となる漸近形を持つが、その一次式の係数が主要項に関係する。熱方程式の短時間漸近挙動の場合、この主要項に相当する係数に考えている空間内の点と境界上の各点との距離が現れるため、その最小値(これを「最短の長さ」と呼ぶ)が短時間漸近挙動を決めていることになる。考えている逆問題においてレゾルベントの漸近挙動の解析から得られるものは熱方程式の短時間漸近挙動のときに現れたものとは一致しない。しかし、指数減衰するためその指数の中の一次の係数の最小値(すなわち「最短の長さ」)を取り出すという構造は同じである。逆問題の場合、観測データを用いることにより、それぞれの逆問題の問題設定によって定まる「最短の長さ」をこの指数の部分から取り出すことが可能になり、この作業を通じて、「最短の長さ」が求まることが明らかにされてきた。

このように、レゾルベントの漸近挙動の解析に帰着する方法は逆問題の研究において一定の成果を上げて来ていた。さらに、最短の長さが表れる理由も、その証明を見れば明快に分かる利点もあった。しかし、この方法には問題を「局所化」という視点がない。そのため、この手法はかなり限定された状況のみにおいてしか適用できなくなっており、逆問題の再構成問題について直感的に満足できる解答を与えているとは言い難かった。もちろん、逆問題における一意性、安定性を議論する際には、楕円型微分方程式に対する一意接続性定理やそれと同等な性質を必要とすることはよく知られている。この事実は、逆問題で肯定的な結論を得るためには、扱う微分作用素はかなり限定された堅い構造が求められていると解釈できる。この点を考慮すれば、上記の弱点はやむを得ない面もあるようにも思われるが、研究開始当初における研究代表者らの研究状況や当時の逆問題における研究を見てもこの点についてはまだまだ考察すべき問題が多い状況であった。研究開始当時のこのような背景が本研究課題を策定する大きな動機になった。

2. 研究の目的

本研究の目的・目標は、時間に依存した微分方程式で記述される逆問題を囲い込み法により研究する際に現れる漸近挙動の解析において、上記で述べた「局所化」を定式化、実行することにある。ここで「局所化」ということの意味をより詳しく述べる。「囲い込み法」に限らず、逆問題では「指示関数」と呼ばれる関数を観測データから定め、この指示関数の解析を通じて空洞や介在物(内部に入っている異質な物質のこと、inclusion ともいう、inclusion の内部では波の伝播速度が外部のものとは異なっている)など媒質内部の情報を得ようとする。典型的な問題として、通常の波動方程式において介在物の場所を、そこから離れた場所から信号を放射し、反射波を観測することから介在物を検出するという問題を考える。この場合、指示関数はこの観測行動を表す波動方程式の解を用いて定義される。ここで、先見情報として、介在物の内部の伝播速度は外部の伝播速度よりも常に大きい(または小さい)ことだけはあらかじめ分かっていると仮定する。このとき、部分積分および楕円型評価を用いることにより、この指示関数は介在物がない場合のレゾルベントにより与えられる解の勾配の介在物の上における自乗積分に関する漸近挙動を調べることに帰着さ

れることがよく知られている（この報告書では上記の方法を「楕円型評価による方法 (method of elliptic estimates)」と呼ぶことにする）。この場合のレゾルベントは、Helmholtz 方程式の基本解においてパラメータを純虚数にしたものであり、この基本解はレゾルベントの積分核表示を与えている。すなわち元の問題は、上記の基本解のパラメータが大きくなるときの漸近挙動を調べる問題に帰着される。

基本解はある固定した点に台を持つ δ 関数をデータにもつ解である。これはあらゆる方向に同じ出力で信号が発射されている場合の解を表している。上の例では、用いている基本解は具体的に表示され、その形を見れば直ちに信号を発射した点と介在物内の点を結んでできる直線の長さの最小値（正しくは下限）が指示関数から取り出せることが分る。この最小値を与える点は、一般には、1点のみであることが多い。言い換えると、用いた基本解のうち、この最小値を与える点の近くに影響を与える部分だけが必要で、他の部分はいらぬのではと思われる。それが正しければ、最小値を与える点の近くだけを取り出せるような解析を行い、問題の局所化が出来れば十分なはずである。実は、上で述べた様に基本解をそのまま用いる解析は、上記の「局所化」については最初から考慮していないことを意味している。そこで、基本解の必要と思われる部分を取り出せるような解を用いることにより介在物や空洞の情報、特にそれらがどこに存在するかという情報を観測データから引き出せるか、もしできないとすれば、その理由を解明したいというのがこの研究の目的であった。

3. 研究の方法

上述の通り、本研究は囲い込み法による時間依存微分方程式に対する逆問題の解析において「局所化」という視点の導入を目的とし、さらに、これまで研究代表者らが研究してきたレゾルベントの漸近挙動の解析を利用した逆問題への取り組みにおける適用範囲の拡張を目指すものであった。これまでの解析法では本質的に基本解全体を用いた定式化になっており、必要以上の情報を利用していると思われる。それが適用範囲を限る原因となっていたので、その部分の改善に関する考察として、次の問題の考察から始めようとした。

接合境界面が平坦であるということのみを先見情報とし、平坦な接合境界面の上側から波を発射、観測することにより接合境界面の位置や下側の伝播速度についての情報を得る。この問題を通じて次の2点の考察を目標とする。

(A) 問題の局所化が可能となるように基本解から必要な方向だけを取り出して解析できるか。

(B) (A)を実行するために必要となる逆問題に適用可能な誤差処理法を開発する。これが設定した研究方法であった。

本研究開始当時の状況では下記の理由によりこの設定が一番近道かと思われた。しかしながら、実際に研究を行うと状況は思ったよりも複雑なことが（証明はできないが）明らかになり出した。(A)について考察するためには、異物からの反射波を記述する必要があり、これをきちんと解決しないと(A)の「局所化」には進めないことが明らかになった。すなわち、「局所化」の問題は入射波と反射波では別の問題になっている。そのため、まずは反射波の解析を優先させるため問題設定を接合境界面がない場合、より詳しくは、一様な媒質の中にディリクレ境界条件とノイマン型(ロバン)境界条件に従う穴とが混在する場合に変更して考察することにした。局所化の可能性を調べるため、入射波は基本解を用いるが、反射波については漸近解を用いることにより「局所化」についての考察を試みた。その後の展開は次の「4. 研究成果」の欄で詳述する。入射波と反射波を分けて考えるのは当初研究計画策定時の構想から見ると少し後退した感は否めないが、この設定でも十分に難しい課題であった。また、これができないのであれば「局所化」という発想自体に誤りがあるかもしれないため、それを見極めるため、上記の設定に変更して研究を続けることにした。

4. 研究成果

「研究の方法」欄で述べたとおり、一様な媒質の中にディリクレ境界条件とノイマン型(ロバン)境界条件に従う穴とが混在する場合に問題設定を変更して研究を行った。以下、一様な媒質の中にノイマン型(ロバン)境界条件に従う穴だけがあるか、またはディリクレ境界条件に従う穴のみが存在することを非混在型とよぶ。穴の推定問題についての先行研究も多々あるが、それらはすべて非混在型であった。以下、本研究で扱った場合、すなわち一様な媒質の中にディリクレ境界条件とノイマン型(ロバン)境界条件に従う穴とが混在する場合を混在型と呼ぶ。先行研究から、非混在型では穴と入射波を発する領域の距離が最短の長さとして現れることは既に分かっている。混在型でも同様のことが得られるかどうかも新たな問題であった。これについて下記を得た。

(1) まずは漸近解を用いることにより反射波を構成するという方法の可能性を確かめるため、十分に強い仮定を置いた場合にどうなるかを調べた。その結果、境界が十分滑らか(6

回連続微分可能)なら指示関数の評価が可能なが分かった。但し、混在型では指示関数の符号が例えば、ディリクレ境界条件の場合は負になり、ノイマン境界条件のときは正になる。この事実は非混在型の場合に既に知られていた。元の方程式が線型方程式であることから概ね予想できることではあるが、混在型では非混在型におけるおのおのの主要項の和が実際、現れることが明らかになった。

(2)構成した漸近解はスペクトルパラメータについて指数関数の速さで減衰する。この問題の設定からこの事実は自然であるが、これが誤差評価を困難にする大きな問題点であった。この困難を回避するために減衰を相殺する関数を掛けて評価を行うことを目指した。この部分も境界が十分滑らか(6回連続微分可能)なら問題なく評価出来ることが分かった。これが(1)が成立した大きな原因である。しかしながら、この境界に対する仮定は強すぎると思われるので、それを弱めることが次の課題になった。

(3)境界の滑らかさについての仮定を弱める作業は意外ではあるが、ディリクレ境界の方が遙かに難しく、難航した。基本的に楕円型境界値問題の解の1階微分の境界付近の評価に帰着されることが分かってきたが、既存の結果を使えるような形ではなく、新たな評価を行う必要があった。これについては先行研究をかなり検索したが、本研究に使える形のものはいずれも皆無であったため、既存の方法とは本質的に異なっている可能性が高いと思われる。結果としては、今のところ境界の滑らかさが、ノイマン型境界はリプシッツ連続、ディリクレ境界は2回連続微分可能であれば、誤差評価に使えるような解の評価を得ることができた。しかし、この研究についてはここで止めていて、論文公表準備なども今のところ行っていない。後で述べるように、漸近挙動を調べるためには主要項の扱いも必要である。そのために、非退化性と呼ばれる仮定を別途課す必要があることが分かってきた。そこで、誤差評価の部分も非退化性を利用すれば、別の方法で処理する方が良いことが明らかになった。ここで得た解の評価についての公表準備をまだ行っていないのはそのためである。得られた解の評価は楕円型境界値問題の解の境界付近における正則性の問題と関連が深く、それ自体興味深い内容を含んでいると思っている。さらに、この評価を利用すると非退化性の仮定がない場合にも考察可能になる可能性もある。しかし、本研究の目的達成について考えると、非退化性の仮定を加えてもまずは全体として成果公表できる形にする方が優先すべきであるため、公表の準備は後回しにし、先に下記の(4)~(6)の研究を優先させた。この結果については今後の研究展開を考えながら、論文として公表を目指したい。

(4)(1),(2)の考察により、混在型であっても、最短の長さを与える箇所がどちらかの穴に限定されている場合は、非混在型の場合と同じ方法で議論できるべきである。この予想を確認するために別途考察を行い、これについては正しいことを確認した(現在論文投稿中)。この方法は「2.研究の目的」の欄で述べたように、楕円型境界値問題の解に対する初等的な評価方法のみから結論を得ることができるので「楕円型評価による方法(method of elliptic estimates)」と呼ぶことにした。この用語は一般的なものではなく、本研究課題において便宜的に導入したものであることに注意されたい。楕円型評価による方法の欠点はこの研究課題の原点となった「局所化」の視点が無いことにあるが、基本的な評価しか用いないので、非退化性などの仮定を必要とせず、境界の仮定をかなり弱くでき、穴や介在物が混在していても、さらに、接合境界がある状況下でも同じように議論できるという利点もある。先行研究では非混在型でさらに穴のみ、介在物のみしかないなど、限定された場合に限り議論されていたが、本研究ではこれらを総合した混在型であっても議論可能であること、及び境界の仮定もできる限り弱くできることを確認した。穴や介在物の境界は、境界を表す関数がリプシッツ連続であれば十分であるが、ノイマン型境界で境界条件に消散項がある場合は今のところ境界を表す関数は1回連続微分可能であることが必要である。これは意外な発見であった。この仮定をリプシッツ連続にしてしまうと、ソボレフの埋め込み定理における最良定数が変わることが原因になり、その影響を受けて結果が変わってしまう恐れがある。この場合の考察は今後の課題である。なお、境界の微分可能性が2回連続微分可能でない場合、漸近解を通常の方法で用いることは不可能と思われる。これは漸近解を構成する際には境界の微分可能性をある程度必要とすることから来る。そのため、「局所化」を考える際には少なくとも境界は2回連続微分可能性を仮定する必要があると思われる。

(5)(4)により混在型で、最短の長さを与えている穴がどちらの境界条件を満たしているかが分からない場合「局所化」を本質的に必要とする状況になることが分かった。そこでこの場合について、漸近解を構成することにより反射波の部分のみを局所化することにした。結果としてはノイマン型境界条件の境界は3回微分可能、ディリクレ境界条件の方は4回微分可能な場合には、この方法はうまく機能し、(3)で述べた非退化性の仮定の下で指示関数の漸近挙動を求めることができた。これまでの研究成果についての紹介を何度か研究発表した。さらに Kyushu University IMI Workshop of the Joint Research Projects (I), Practical Inverse Problems and Their Prospects において研究成果についての解説を依頼され、本研究課題についての成果を発表し、その解説記事がIMIから発行された Proceedings に掲載された。

(6)(5)の漸近解を用いる方法については、上記 Proceedings で紹介した結果について論文投稿の準備を行った。ノイマン型境界の方を3回微分可能にするのは技術的に難しく読みにくくなるので、まずは両方とも4回微分可能である状況に限定し、(3)で述べた非退化性

の仮定の下で、指示関数の漸近挙動を求めた。主要項の漸近挙動を導く際には、主要項が積分核表示を持っていることと、最短の長さが出てくることに着目し、ラプラス積分の漸近挙動を導く解析を利用していた。漸近解を利用しているので、解の積分核表示を行うことが可能になる。この表示を積極的に用いることに方針転換することにより、誤差項も主要項と同様に扱えることが判明した（現在論文投稿中）。研究が進展した大きな理由の一つとして、この発見がある。得られた結果は(1)で述べたとおり非混在型の際の結果の和になる。その事実だけなら十分に予想可能である。その証明を与えたことに意義があると考えている。ただ、指示関数の漸近挙動から穴についての情報が得られるかということについては、混在型では相殺する項があるので難しいものがある。例えば穴の種類が分かるかということを見ると、ディリクレ境界条件の穴とノイマン境界条件の穴のみからなることが分かっていたら、最短の距離を与える点における穴の曲率が小さくなる（すなわち平坦に近いと考えられる）方が検出されることが明らかになった。混合型で穴の曲率を得るにはより深い考察が必要になると思われ、この指示関数を用いる方法での限界まで引き出せたのではないかと考えている。

(7) 本研究期間において行った研究は上記(1)～(6)である。Proceedings で紹介したノイマン型境界の仮定をより弱めた場合については、本研究本研究を引き継いだ新たな研究課題において考えられ、結果として、Proceedings で紹介した場合よりも弱い2回連続微分可能かつ2階導関数がヘルダー連続であればよいことが新たに明らかになった（現在論文準備中）。漸近解を利用する方法では当面2回連続微分可能な場合を扱えば最良と思われるので、ほぼ最良に近いところまで来ていると言える。なお、(3)で述べたように(5),(6)は「非退化性」の仮定を用いているので、この仮定をなくせばどうなるかについては今後の課題である。「非退化性」の仮定がない状況下では(3)の誤差評価を目指した際に得られた評価が活躍することを期待している。また、元の研究課題であった接合境界がある場合の考察や入射波の方を局所化することについての考察も研究課題として残っている。これらについては引き続き研究を継続して、新たな知見を少しでも得られるように努力したい。

最後に、本研究を通じ明らかになったことを一言でまとめれば、「局所化」についての問題の本質は誤差評価方法の開発にあり、これらはほぼ同義である、ということにある。この知見に至ったのは本研究課題を実行したからで、研究開始当時と比べると大きな進展があったと思っている。これまでの蓄積を元に、更なる研究の進展を図りたい。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 2件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Mishio Kawashita and Wakako Kawashita	4. 巻 37
2. 論文標題 Enclosure method for inverse problems with the Dirichlet and Neumann combined case	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 the proceedings of IMI workshop, "Practical inverse problems and their prospects". in Book series "Mathematics for Industry"	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Mishio Kawashita and Wakako Kawashita	4. 巻 2195
2. 論文標題 Asymptotics of some function corresponding to refraction phenomena arising in inverse problems of wave equation of flat two layer medium	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 RIMS Koukyuroku	6. 最初と最後の頁 42-63
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Masaru Ikehata, Mishio Kawashita and Wakako Kawashita	4. 巻 13 (5) :
2. 論文標題 On finding a buried obstacle in a layered medium via the time domain enclosure method in the case of possible total reflection phenomena,	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Inverse Problems and Imaging	6. 最初と最後の頁 959-981
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3934/ipi.2019043	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

〔学会発表〕 計7件（うち招待講演 6件 / うち国際学会 4件）

1. 発表者名 川下美潮・川下和日子
2. 発表標題 複数種の穴を持つ媒質についての波動方程式による逆問題における指示関数の漸近挙動について
3. 学会等名 日本数学会 2023年度秋期総合分科会一般講演
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 川下美潮
2. 発表標題 Inverse problems for media with multiple types of cavities
3. 学会等名 第41回 九州における偏微分方程式研究集会 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 川下美潮・川下和日子
2. 発表標題 Dirichlet 境界と Neumann 境界が混在する媒質における波動方程式の逆問題に現れる指示関数の漸近挙動について
3. 学会等名 Takamatsu Workshop on Partial Differential Equations (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Mishio Kawashita
2. 発表標題 Inverse problems for wave equations with the Dirichlet and Neumann cavities
3. 学会等名 Theory and practice in inverse problems (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Mishio Kawashita
2. 発表標題 Inverse problems for wave equations with the Dirichlet and Neumann cavities
3. 学会等名 Practical inverse problems and their prospects (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 川下美潮
2. 発表標題 Finding obstacles in the below side of two layered media by the enclosure method
3. 学会等名 第12回 名古屋微分方程式研究集会 (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 川下美潮
2. 発表標題 Asymptotics of some function corresponding to refraction phenomena arising in inverse problems for wave equations in at two-layered medium
3. 学会等名 スペクトル・散乱理論とその周辺(RIMS 共同研究(公開型))(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------