

令和 5 年 5 月 24 日現在

機関番号：32670

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2019～2022

課題番号：19K03572

研究課題名（和文）非均質領域における偏微分方程式の解析

研究課題名（英文）Analysis for partial differential equations systems in non-homogeneous regions.

研究代表者

愛木 豊彦（AIKI, Toyohiko）

日本女子大学・理学部・教授

研究者番号：90231745

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,300,000円

研究成果の概要（和文）：当初、コンクリートのような硬い物質を想定して解析を始めたが、スポンジのような多孔性物質はその伸縮により場所ごとに特性が変化するため、このような弾性体を非均質領域として着目することにした。また、変位が微小とはいえないスポンジのような弾性体の動きを記述する偏微分方程式に対する研究が十分に進んでいなかったため、まずは弾性体を2次元閉曲線とみなした数理モデルの解析に重点的に取り組んだ。このモデルに現れる非線形歪みから生じる数学的困難を応力関数に特異性を仮定することで克服し、圧縮による歪みに対し下限が存在することを証明するなど、弾性体方程式に関してこれまででない成果を挙げることができた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

弾性的な性質をもつ多孔性物質に対する浸透現象を記述する微分方程式モデルを提案することができた。本研究で示した数理モデルは極めて単純化した現象しか扱えないが、物質の力学的変化と水分量の変化を同時に考慮した初の数理モデルである。特に、スポンジのような変位が大きな値を取り得る物質の変化を、特異性が仮定された応力関数によって大域的な解の存在を示したことができた。これは、これまでの弾性体方程式では得られなかった結果であり、今後、この方程式を元にすることで弾性体の運動をより現実的なモデルで考慮記できるようになるものと考えている。

研究成果の概要（英文）：At the beginning in this research project, our aim was to analyze dynamics for bulk materials, for example, concrete buildings. However, we considered that porous elastic materials like sponges are more suitable for examples of non-homogenous materials, since the character can be changed at each point by shrinking and stretching motions. Moreover, there were few mathematical results dealing with large deformations, which appears in a mathematical model for elasticity of porous materials. Hence, we have aimed to analysis the model in which elastic materials is regarded as the closed curve in the plane. In this model we faced a mathematical difficulty caused from nonlinear strains. In this research we could overcome the difficulty by introducing a new stress function having a singularity and obtained completely new results on elastic equations, for instance we give a lower bound for the strain from below.

研究分野：数理解析学

キーワード：弾性体 非線形偏微分方程式 非線形歪み 非線形応力関数

1. 研究開始当初の背景

研究開始時点では、非均質領域に関わる現象の具体例として、「コンクリート中性化過程(マルチスケールモデル)」と「微小領域における分子分離」を想定し、その時点で得られていた研究成果の整理、改良、発展に取り組んでいた。同時に、マルチスケールモデルで記述される現象について検討していたところ、研究協力者の Muntean 氏(Karlstad University, Sweden)との協議によりスポンジのような弾性を伴う多孔質媒体に関連する種々の応用例の存在を知り、この素材に対する数理モデルの構築も研究課題として採択することとした。弾性体の変形を記述する数理モデルに関連する先行研究を調査した結果、ほとんどのモデルで微小変位を仮定しており、スポンジのような巨視的な変形を扱うモデルがないことが判明した。また、この素材は弾性変形により、水分移動に関わる係数も場所ごとに変化するため、本研究課題である「非均質領域における偏微分方程式の解析」の題材にふさわしいと判断し、弾性体の変形に関する解析も研究課題に追加した。

2. 研究の目的

本研究では(1)コンクリート中性化過程するマルチスケールモデル、(2)微小領域における分子分離、(3)弾性体の変形を記述する数理モデルの3つについて考察する。それぞれに対する研究目的を述べる。

- (1) コンクリート中性化過程を記述するマルチスケールモデルは、水分移動を表す巨視的モデルと、コンクリート内部における水分吸着現象を表す微視的モデルによって構成される。巨視的モデルは3次元領域における非線形拡散方程式に対する初期値境界値問題、微視的モデルは1次元自由境界問題であり、これらが互いの境界条件や方程式の外力項として現れる。この問題の解の時間的大域解の存在を示す。
- (2) 微小領域における分子分離を図1のような2種の混合領域で考える。赤色が光を受けて熱を発生させる領域であり、青色の部分には液体があり、赤色の部分で発生する熱によって温度が変化する。さらに、液体では温度勾配に濃度勾配が依存するというソレ効果も考慮する。温度分布は2種の接触部分では回折型境界条件を課した熱方程式に従うものとし、その温度勾配を含む拡散方程式によって、濃度が定まるものとした。本研究では、このモデルに対する数学的解析と数値解法について考察する。
- (3) 微小ではない変位を扱える弾性体方程式の構築とその解の存在や一意性といった基本的な性質を示すことを研究目的とする。また、多孔質媒体である弾性体内部を水分が移動する場合についても考察する。

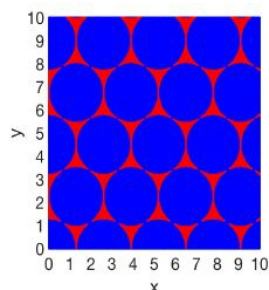


図1

3. 研究の方法

上記3課題に対する研究方法を示す。

- (1) コンクリート中性化過程を記述するマルチスケールモデルの研究者である熊崎耕太氏(2023年3月まで長崎大学に在籍、4月から京都教育大学)と定期的に研究打合せをしながら研究を進める。
- (2) この研究課題では、数値解析が重要な役割を果たすため、数値解析に詳しいAnthonissen氏(TU Eindhoven, the Netherlands)と共同で研究を進める。
- (3) 多孔質媒体の弾性体に対するモデリングについては、Muntean氏と共同で進め、数学的解析については、主に愛木が担当する。また、弾性体に対する数値計算については、Anthonissen氏と共同で進める。

4. 研究成果

以下の研究成果が得られた。

- (1) コンクリート中性化過程を記述するマルチスケールモデルについて
巨視領域における水分分布を既知としたときの、1次元自由境界問題の解の巨視領域の位置を示す変数に関する可測性を証明した。この証明では、水分分布を表す関数が滑らかな場合に連続性を示し、その極限を考えることで、水分分布が一般の場合に可測性が成り立つことを示した。また、1次元自由境界問題の解の巨視領域の位置を示す変数に関する微分可能性も証明することができた。さらにその導関数が満たす方程式も得ることができた。この成果を元に、熊崎氏がマルチスケール問題の解の時間に関する大域存在を示すことに成功した。
- (2) 微小領域における分子分離について
これまでの数値計算結果や解析結果を統合し、成果を論文としてまとめ発表することができた。この内容については、海外の国際会議でも成果を発表した。
- (3) 多孔質媒体の弾性体に対するモデリングについて
この課題については、多孔質媒体に関する成果と微小とは限らない変位を扱える弾性体モデル

に対する成果とを分けて紹介する。

・弾性体である多孔質媒体中の水分移動について

本課題について、多孔質媒体の一つの孔に水分が侵入するモデルを構築し、その解の存在と位置性を示すことができた。特に、この結果においては、弾性体の歪みに対する下からの評価方法を確立することができた。また、実験結果をもとに弾性体中の水分侵入に対する自由境界モデルを導出し、その数値計算結果をもとにモデルの妥当性について検証した。ここでは、弾性体の動きを記述する数理モデルにおける未知関数を位置としており、その定義域および値域はともに1次元空間である。

・微小とは限らない変位を扱える弾性体について

このモデルでは針金のような細長い弾性体を曲げて繋げることで作成した輪を閉曲線とみなしている。このモデルにおける未知関数は、上と同様に位置であるが、定義域が1次元空間、定義域が2次元空間の部分集合であり、定義域と値域の次元が異なっている。そのため、弾性体に対する多くの考察で採用されている変位を定義できない。そこで、ここでも未知関数は位置である。さらにこの次元の差によって、歪みが位置の空間に関する導関数の絶対値を含む式によって定義される。そのため、歪みが非線形であるだけでなく、原点において滑らかではない数学的に扱いが困難な関数として定義される。このような歪みを扱うために、我々は図2で示されるような非線形かつ特異点をもつ関数 $f(\varepsilon)$ を用いて応力を定義することにした。

従来、応力は未知関数の空間微分に比例するものが多く考えられてきたが、それでは実際の現象に適合しないという結果を得ることができた。弾性体の初期位置と初速を円のような対称な関数として与えると、解は半径だけに依存する。図3では横軸を時間、縦軸は弾性体を表す円の半径とし、その時間変化を表している。図3から分かるように、初期歪みが大きい場合、半径は負の値をとり現象に合わない。これに対し、図4では特異点をもつ関数を用いて応力を定めた場合の半径の時間変化を示している。こちらでは、半径は非負の値をとらない。このように我々の提案する応力関数を採用することで、初期変位が大きい場合も扱うことができるモデルを提案することができた。

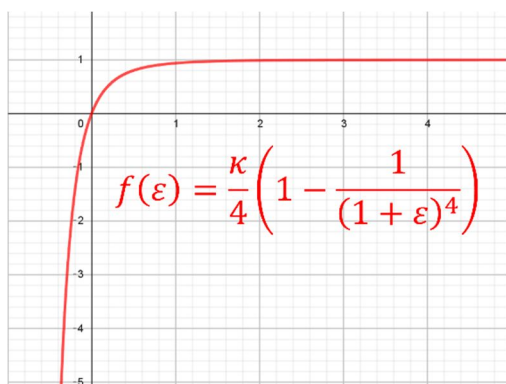


図2

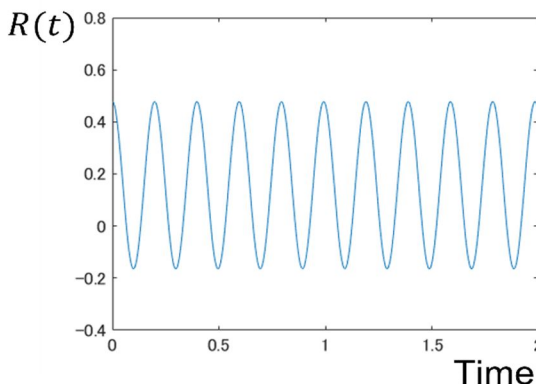


図3

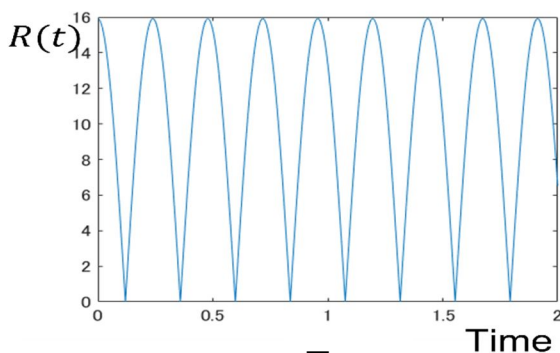


図4

このモデルについては、まず弾性体を有限個の質点からなる物質をみなすことで得られた常微分方程式モデルの解の存在・一意性、さらには数値解の厳密解への収束速度を示すことができた。この結果では、数値解の不安定性に関する興味深い結果を観察することもできた。この不安定性の原因究明や安定解を得られる数値解法の開発が今後の課題となった。

常微分方程式をもとに偏微分方程式モデルを導出し、それをbeam方程式によって近似した初期値境界値問題を構築した。

この問題に対し、特異性をもつ応力関数から得られる評価をもとに、歪みに対する下からの評価を示すことができた。これは、長さをもつ弾性体が圧縮されたとしてもその長さがある値より短くならないことを示している。この評価から、問題の解の一意性や存在を証明することができた。さらに、時間に依存しない一様評価も得られたため、解が定常解に収束する部分列をもつという時間無限大での解の挙動に関する成果も得られた。

この研究を通して、数値解の安定性、定常問題の一意性、解の時間無限大における収束等の多くの課題が得られたことも本研究の重要な成果である。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計14件（うち査読付論文 14件 / うち国際共著 9件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Toyohiko Aiki, Miyu Hotta	4. 巻 31
2. 論文標題 Age-dependent model for population dynamics of polyps, one life stage of jellyfish	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Advances in Mathematical Sciences and Applications	6. 最初と最後の頁 473-480
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Kumazaki Kota, Aiki Toyohiko, Muntean Adrian	4. 巻 18
2. 論文標題 Local existence of a solution to a free boundary problem describing migration into rubber with a breaking effect	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Networks and Heterogeneous Media	6. 最初と最後の頁 80 ~ 108
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3934/nhm.2023004	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Aiki Toyohiko, Kumazaki Kota, Muntean Adrian	4. 巻 102
2. 論文標題 A free boundary problem describing migration into rubbers ? Quest for the large time behavior	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik	6. 最初と最後の頁 e202100134
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1002/zamm.202100134	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Aiki Toyohiko, Kroger Nils, Muntean Adrian	4. 巻 79
2. 論文標題 A macro-micro elasticity-diffusion system modeling absorption-induced swelling in rubber foams: Proof of the strong solvability	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Quarterly of Applied Mathematics	6. 最初と最後の頁 545 ~ 579
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/qam/1592	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Aiki Toyohiko, Kosugi Chiharu	4. 巻 36
2. 論文標題 Existence and Uniqueness of Weak Solutions for the Model Representing Motions of Curves Made of Elastic Materials	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics	6. 最初と最後の頁 44 ~ 56
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.26516/1997-7670.2021.36.44	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Chiharu Kosugi, Toyohiko Aiki, Martijn Anthonissen, Makoto Okumura	4. 巻 30
2. 論文標題 Numerical results for ordinary and partial differential equations describing motions of elastic materials	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Advances in Mathematical Sciences and Applications	6. 最初と最後の頁 387-414
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Surendra Nepal, Robert Meyer, Nils Hendrik Kroger, Toyohiko Aiki, Adrian Muntean, Yosief Wondmagegne, Ulrich Giese	4. 巻 5
2. 論文標題 A Moving Boundary approach of Capturing diffusants Penetration into Rubber: FEM Approximation and Comparison with laboratory Measurements	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 KGK Kautschuk Gummi Kunststoffe,	6. 最初と最後の頁 61-68
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Toyohiko Aiki, Kota Kumazaki	4. 巻 29
2. 論文標題 Differentiability of a solution of a free boundary problem describing water adsorption	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Advances in Mathematical Sciences and Applications	6. 最初と最後の頁 247-282
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Toyohiko Aiki, Kota Kumazaki	4. 巻 29
2. 論文標題 Remark on differentiability of solutions of free boundary problems describing water adsorption	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Advances in Mathematical Sciences and Applications	6. 最初と最後の頁 283-293
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Toyohiko Aiki, Chiharu Kosugi	4. 巻 29
2. 論文標題 Numerical schemes for ordinary differential equations describing shrinking and stretching motion of elastic materials	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Advances in Mathematical Sciences and Applications	6. 最初と最後の頁 459-494
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Sergey A. Timoshin, Toyohiko Aiki	4. 巻 59
2. 論文標題 Relaxation in population dynamics models with hysteresis	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 SIAM J. Control Optim	6. 最初と最後の頁 459-494
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1137/19M1279551	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Sergey A. Timoshin, T. Aiki	4. 巻 47
2. 論文標題 Extreme solutions in control of moisture transport in concrete carbonation	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Nonlinear Analysis: Real World Applications	6. 最初と最後の頁 446-459
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.nonrwa.2018.12.003	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Sergey A. Timoshin, T. Aiki	4. 巻 128
2. 論文標題 Control of biological models with hysteresis	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Systems & Control Letters	6. 最初と最後の頁 41-45
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.sysconle.2019.04.003	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Toyohiko Aiki, Martijn Anthonissen and Miu Takahashi	4. 巻 28
2. 論文標題 Initial boundary value problem describing a real experiment related to the Soret effect	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Advances in Mathematical Sciences and Applications	6. 最初と最後の頁 387-411
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計25件 (うち招待講演 8件 / うち国際学会 3件)

1. 発表者名 小杉千春, 愛木豊彦
2. 発表標題 圧縮性弾性体の伸縮運動を表す初期値境界値問題の強解に対する 極限集合について
3. 学会等名 日本数学会・実函数論分科会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 森村晃子, 愛木豊彦
2. 発表標題 多孔質媒体における水分移動モデルの解の存在と一意性について
3. 学会等名 日本数学会・実函数論分科会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 小杉千春, 愛木豊彦
2. 発表標題 圧縮性弾性体の伸縮運動を表現する初期値境界値問題の解に対する 極限集合について
3. 学会等名 第48回発展方程式研究会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 森村晃子, 愛木豊彦
2. 発表標題 1次元領域における多孔質媒体中の水分移動モデルの解の存在と一意性について
3. 学会等名 第48回発展方程式研究会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 小杉千春, 愛木豊彦
2. 発表標題 圧縮性弾性体の伸縮運動を表す初期値境界値問題の時間無限大における解の挙動について
3. 学会等名 日本数学会・実函数論分科会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 愛木豊彦
2. 発表標題 気泡ゴム (rubber foams) に対する数理モデルの解の存在と一意性
3. 学会等名 研究集会「第6回非線形数理科学」
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 愛木豊彦
2. 発表標題 気泡ゴム(rubber foams) に対する数理モデルの可解性
3. 学会等名 第173回神楽坂解析セミナー(招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 小杉千春, 愛木豊彦
2. 発表標題 平面上での圧縮性弾性体の伸縮運動を表す初期値境界値問題の弱解の一意性について
3. 学会等名 日本数学会・実函数論分科会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 愛木豊彦
2. 発表標題 気泡ゴム(rubber foams) の変形を記述する数理モデルについて
3. 学会等名 京都大学数理解析研究所・研究集会 発展方程式の広がり: 理論的基礎から実践的応用まで(招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 小杉千春, 愛木豊彦
2. 発表標題 平面上の圧縮性弾性体の伸縮運動を表す初期値境界値問題の強解の存在について
3. 学会等名 第47回発展方程式研究会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 小杉千春, 愛木豊彦
2. 発表標題 平面上の圧縮性弾性体の伸縮運動に対する初期値境界値問題の強解の存在について
3. 学会等名 日本数学会・実函数論分科会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 熊崎耕太, 愛木豊彦
2. 発表標題 非単調な境界条件を持つ気泡ゴム内の拡散物質の浸透を表すある1次元自由境界問題について
3. 学会等名 日本数学会・実函数論分科会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Toyohiko Aiki
2. 発表標題 Two-scale model for moisture transport in concrete carbonation process
3. 学会等名 Karlstad Applied Analysis Seminar, Karlstad University, Sweden (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Toyohiko Aiki
2. 発表標題 A mathematical model for expansion and contraction motion of elastic materials
3. 学会等名 CASA Colloquium, Eindhoven University of Technology, Netherland (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 小杉千春、愛木豊彦
2. 発表標題 平面上において弾性体の伸縮運動を表現する初期値境界値問題の弱解の一 意性について
3. 学会等名 日本数学会・実函数論分科会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 愛木豊彦
2. 発表標題 気泡ゴム(rubber foams) に対する数理モデルの提案
3. 学会等名 第723 回応用解析研究会(招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 小杉千春、愛木豊彦
2. 発表標題 圧縮性弾性体の伸縮運動を表現する初期値境界値問題の弱解の存在について
3. 学会等名 第46 回発展方程式研究会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 小杉千春、愛木豊彦
2. 発表標題 R ² 上における圧縮性弾性体の伸縮運動に対する初期値境界値問題の弱解の存在について
3. 学会等名 日本数学会・実函数論分科会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Toyohiko Aiki
2. 発表標題 Diffraction problem for parabolic equations describing experiments on the Soret effect
3. 学会等名 equadiff2019 (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Chiiharu Kosugi, Toyohiko Aiki
2. 発表標題 Mathematical model for rotational motion of shape memory alloy ring partially within hot water
3. 学会等名 equadiff2019 (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Toyohiko Aiki
2. 発表標題 Recent works on 3D models for concrete carbonation dealing with hysteresis effects
3. 学会等名 Kanazawa workshop: Gradient flows and related topics: analysis and applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 愛木豊彦
2. 発表標題 形状記憶合金の解析に向けた弾性体の動きを記述する数値モデルとその数値計算結果について
3. 学会等名 岩手数理学セミナー (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 愛木豊彦
2. 発表標題 多次元コンクリートの中性化を記述するマルチスケールモデルについて
3. 学会等名 第91回岐阜数理科学セミナー（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 小杉千春・愛木豊彦
2. 発表標題 弾性体の伸縮運動を表す初期値境界値問題の弱解の存在について
3. 学会等名 第45回発展方程式研究会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 小杉千春・愛木豊彦
2. 発表標題 弾性体の収縮運動を記述する初期値境界値問題の弱解の存在について
3. 学会等名 日本数学会・実函数論分科会
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
オランダ	Technical University of Eindhoven			
スウェーデン	Karlstad University			