様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　５年　５月２８日現在

機関番号：３２６８９
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2019～2022
課題番号：１９Ｋ０３５７３

研究課題名（和文）数理生態学に現れる自由境界問題と関連する非線形拡散方程式の研究

研究課題名（英文）Study on free boundary problems arising in mathematical ecology and related nonlinear diffusion equations

研究代表者
山田　義雄（Yamada, Yoshio）

早稲田大学・理工学術院・名誉教授

研究者番号：２０１１１８２５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　1,500,000円

研究成果の概要（和文）：非線形拡散方程式に対する自由境界問題を研究した．数理生態学に現れる外来種の侵入現象をモデルとして考えると，未知関数は種の個体数密度と生息領域であり，生息領域の境界が自由境界である．密度関数は反応拡散方程式を満たし，自由境界の動きはステファン条件によって支配される．本研究では，二つの正値安定平衡点を持つ，正値双安定な反応項を伴う拡散方程式を考え，高次元空間における自由境界問題の解挙動を詳しく調べた．重要な研究成果として，各安定平衡点に対応する二種類のspreading 現象が起こること，およびそれぞれのケースにおける自由境界の拡大速度や密度関数の漸近的形状について精確な評価を得た．

研究成果の学術的意義や社会的意義
本研究で取り扱った自由境界問題は，数理生態学における外来種の侵入現象をモデルとしている．ここでは2次元以上の空間における反応拡散方程式の解と自由境界の性質を詳しく調べた．主な研究成果は解挙動の分類，および自由境界や密度関数に関する時間無限大における詳細な漸近評価である．これらの結果は数学的に重要であるのみならず、外来種の侵入現象に適用すれば，外来種の侵入が成功するか否か、また侵入領域の拡大速度はどうか、などの問題について貴重な知見が得られる．

研究成果の概要（英文）： We have studied a free boundary problem for nonlinear diffusion equations. When the problem models the invasion of a new species in mathematical ecology, the population density of the species and its habitat are two unknown functions and the boundary of the habitat is called a free boundary. The population density satisfies a reaction-diffusion equation and the dynamics of the free boundary is governed by a Stefan condition. In this research, we have considered a diffusion equation with a positive bistable reaction term, which possesses two positive stable equilibria, and investigated dynamical behaviors of solutions for the free boundary problem in a higher-dimensional space. As important results, we have proved that two types of spreading phenomena occur correspondingly to two positive equilibria and we also have obtained precise estimates for a spreading speed of the free boundary and an asymptotic profile of the density in each case.

研究分野：非線形解析

キーワード：反応拡散方程式　非線形拡散方程式　自由境界問題　解の漸近挙動　数理生態学　比較定理　spreading

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

2010 年 Du-Lin の論文において非線形拡散方程式に対する，ステファン境界条件を伴う自由境界問題が提起された．空間次元=1 の条件ながら, vanishing-spreading 二者択一定理をはじめ数々の成果が発表された．これらの結果は研究者の注目を集め，このような自由境界問題は活発に研究されてきた．代表的問題を N 次元ユークリッド空間において定式化すると

$$\text{(P)}\qquad \begin{aligned} &u_t = \Delta u + f(u), && t>0, \quad x \in \Omega(t), \\ &u=0, \quad u_t = \mu|\nabla u|^2, && t>0, \quad x \in \Gamma(t), \\ &u(0,x) = u_0(x), && x \in \Omega(0) = \Omega_0, \end{aligned}$$

を満たす $u(t,x)$, $\Omega(t)$ を求めよ, という問題になる．ここで $\Omega(t)$ は自由境界 $\Gamma(t)$ で囲まれた有界領域，μ は正定数，u_0 は非負値関数，Ω_0 は滑らかな境界を持つ有界領域である．

研究代表者のグループが特に興味を持ったテーマは,（P）における反応項 $f(u)$ が正値双安定, すなわち f は C^1 級の函数で, 4 個の零点 0, u_1^*, u_2^*, u_3^* （ $0 < u_1^* < u_2^* < u_3^*$ ）を持ち，このうち u_1^* , u_3^* が安定である，という仮定の下での解析である．空間次元 $N=1$の条件下，時間無限大での（P）の解の漸近挙動は (a) vanishing (絶滅), (b) u_1^* に対応する small spreading (小拡張)，(c) u_3^* に相応する big spreading (大拡張)，(d) 二つの spreading の間の transition (遷移)の 4 タイプに分類できることを示した．さらに (b), (c), (d) のケースにおける自由境界の拡大速度や $u(t,x)$ のプロファイルについて精確な漸近評価を導くことに成功した．残された課題は，高次元空間（ $N \geq 2$ ）における(P)の解挙動を詳しく調べることである．

２．研究の目的

本研究の申請時点で計画していた課題は非線形拡散方程式に対する二相ステファン型自由境界問題の解析であった．しかし，当時は反応項が正値双安定の場合，高次元空間における(P) の解挙動を調べることも懸案の課題であった．したがって，研究代表者は 2019 年度には後者の課題解決に取り組むことを選び，研究を続けた．一般の初期データに対して(P)の古典解が時間大域的に存在するとは限らないが，弱解のクラスでは時間大域的に存在することが知られていた．また Du-Matano-Wang (2014)の結果によれば，十分に時間がたてば弱解は古典解となり，自由境界は球面に，弱解は球対称関数に近づくことが知られていた．

(1) （P）における初期値 u_0 , Ω_0 が球対称ならば, 解 $u(t,x)$ は x について球対称となる．このとき $r=|x|$ とおけば，$\Omega(\mathrm{t}) = \{ r;\ 0 \leq r < h(t)\}$ の形に表現することができ，自由境界は $\Gamma(t) = \{ r;\ r = h(t)\}$と表される．$u(t,r) = u(t,x)$，$h(t)$ は次の方程式系を満たす：

$$\text{(PRS)}\qquad \begin{aligned} &u_t = u_{rr} + (N-1)u_r/r + f(u), && t>0,\ 0<r<h(t), \\ &u_r(t,0) = u\big(t,h(t)\big) = 0, && t>0, \\ &h'(t) = -\mu u_r\big(t,h(t)\big), && t>0, \\ &h(0) = h_0,\ u(0,r) = u_0(r), && 0 \leq r \leq h_0. \end{aligned}$$

（PRS）の解の性質について， $N \geq 2$ の場合において $N=1$ の場合と同様の結果が成立するか，また $N=1$ の場合との相違はどこに現れるか，などの疑問の解決を目指す．

(2) 球対称とは限らない初期データに対して（P）は一意的な時間大域解 $u(t,x)$を持つ．このとき $\Omega(t) = \{ x;\ u(t,x) > 0\}$, $\Gamma(t) = \{ x;\ u(t,x) = 0 \}$となり，自由境界 $\Gamma(t)$ の挙動が興味深

い．次の目標は(P)の解挙動の分類を完成し， $u(t,x)$ や $\Gamma(t)$ に対する $t\to\infty$ での漸近評価を求めることである．

３．研究の方法

本研究は松澤寛氏（沼津高専准教授；2020 年より神奈川大学准教授），兼子裕大氏（日本女子大学助教）との共同研究として遂行した．研究に当たっては，通常は学会や研究集会などに参加し，講演や討論を通して新しい知見・アイデア・手法を得ることが重要であった．しかし 2020 年冬より，新型コロナウイルス感染症が国内外で流行し，次々に研究集会が中止され，研究者と対面で議論する機会が失われてきた．その後，研究集会はオンライン形式で開催されるようになったが，2022 年秋に開催された日本数学会まで共同研研究者と対面で議論する機会はなかった．本研究期間を通して電子メールでのやり取りが共同研究の中心手段であった．

４．研究成果

反応拡散方程式に対する自由境界問題(P)を考える．反応項 f は正値双安定， $f(u^*)=0$ を満たす非負値平衡点は $u^*=0,\ u_1^*,\ u_2^*,\ u_3^*$ （ $0<u_1^*<u_2^*<u_3^*$) の 4 個であり，このうち u_1^*, u_3^* が安定と仮定する．さらに f に対して若干の細かい仮定を設け，（P）の解の性質を詳しく調べた．

(1)　球対称な初期値に対する(PRS)の研究

自由境界問題（PRS）について時間大域解 (u,h) が一意的に存在することが知られており，解が時間の経過とともにどのように振舞うかを知ることが重要である．

①　解挙動の分類：（PRS）の解 (u,h) は次の i)～iv)のうちのいずれか一つを満たす：

i)　Vanishing : $\lim_{t\to\infty} h(t)\le\sqrt{\lambda_1/f'(0)}$ かつ $\lim_{t\to\infty} u(t)=0$ （一様収束），ただし λ_1 はある固有値.

ii)　Small spreading : $\lim_{t\to\infty} h(t)=\infty$ かつ $\lim_{t\to\infty} u(t)=u_1^*$ (広義一様収束).

iii)　Big spreading : $\lim_{t\to\infty} h(t)=\infty$ かつ $\lim_{t\to\infty} u(t)=u_3^*$ (広義一様収束).

iv)　Transition : $\lim_{t\to\infty} h(t)=\infty$ かつ $\lim_{t\to\infty} u(t)=V$ (広義一様収束)，ただし V は単調減少で $\Delta V+f(V)=0,\ \lim_{r\to\infty} V(r)=u_1^*$ を満た球対称関数.

この分類において iv)の現象は ii) と iii) の間の ”ボーダーライン“として現れる特別な現象である.

② 解の漸近評価（通常のケース）: 時間無限大における解の振舞いを調べるとき，最も興味深いいテーマは spreading 解について自由境界がどのような速度で無限に拡がるかを調べることである．この疑問に答えるために，空間次元が 1 の時と同様に次の semi-wave 問題を考える：

$$\text{(SW)}\qquad q_{zz}-cq_z+f(q)=0,\quad q(z)>0,\quad z>0,$$
$$q(0)=0,\quad \mu q_z(0)=c,\quad \lim_{z\to\infty} q(z)=u^*.$$

ここで $u^*=u_1^*$ または u_3^* である．この問題の可解性については $u^*=u_1^*$ ならば (SW)は常に一意解 (q_1,c_1) を持つ．一方，$u^*=u_3^*$ の場合は状況が異なり，（SW）が一意解 (q_3,c_3) を持つ場合と解を持たない場合に分けられる．

以下では(SW)が解 (q_i,c_i) $(i = 1{,}3)$ を持つとして議論を進める．(PRS)の解 (u,h) が small spreading 解の場合は (q_1,c_1) を用い，big spreading 解の場合には (q_3,c_3) を用いることにより (u,h) を次のように評価できた $(i = 1,3)$：

(4.1) $\lim_{t\to\infty}[h(t) - \{c_i t - (N-1)c_{i,*}\log t\}] = H_i$, $\lim_{t\to\infty} h'(t) = c_i$,

($c_{i,*}$ は c_i, q_i から定まる定数，H_i は解から決まる定数) かつ

(4.2) $$\lim_{t\to\infty} \max_{0\le r\le h(t)} |u(t,r) - q_i(h(t) - r)| = 0.$$

このように高次元の場合，自由境界の漸近挙動の評価に対数項が現れることが特徴である．証明に当たり，(PRS)や関連する問題に対して比較定理が成り立つことに注意する．(4.1), (4.2)を示すためには，解を上下から評価するために優解と劣解を繰り返し構成し，評価を精密化した．

③　解の挙動（テラス解）：(SW)が $u^* = u_3^*$ に対して解を持たない場合，big spreading 解 (u,h) がどんな挙動をするか詳しく調べる．このとき $t\to\infty$ とともに $u(t) \to u_3^*$（広義一様収束)となるが，自由境界は $h(t)/t \to c_1$ を満たすことがわる．自由境界の近傍では small spreading に対応する (q_1,c_1) が関係するため，二つの安定平衡点を結ぶ関数が必要となる．$N = 1$ の場合と同様に次の進行波問題を考える：

(TW) $$Q_{zz} - cQ_z + f(Q) = 0,\quad u_1^* < Q(z) < u_3^*,\quad -\infty < z < \infty,$$

$$Q(-\infty) = u_1^*,\quad Q(0) = \frac{u_1^*+u_3^*}{2},\quad Q(\infty) = u_3^* .$$

ここで $f(u)$ は $u_1^* \le u \le u_3^*$ において双安定であるため，(TW)は一意解 (Q_B,c_B)，$c_B < c_1$，を持つ．比較定理を利用して，自由境界 h は（4.1） $(i = 1)$ を満たすことを証明できる．一方 u は（4.2）の代わりに，ある正数 L^* をとれば，任意の $L \ge L^*$ に対して

(4.3) $$\lim_{t\to\infty} \max_{c_1t-L\log t \le r\le h(t)} |u(t,r) - q_1(h(t) - r)| = 0$$

を満たすことを示した．さらに残る区間においては、解に応じて定数 R_B を適当に選んで

(4.4) $$\lim_{t\to\infty} \max_{0\le r\le c_1t-L\log t} \left|u(t,r) - Q_B\left(c_B t - \frac{N-1}{c_B}\log t + R_B - r\right)\right| = 0$$

が成り立つことも証明できた．(4.3) , (4.4)の評価は，$u(t,r)$ のプロファイルが二層のテラス（段丘）を伴い，下層テラスの先端は上層テラスの先端より早く進行することを示している．このようなテラスを伴う解の存在を示したことは重要な成果である．

(2) 一般の初期値に対する(P)の研究

一般の初期値に対する(P)の解析においても比較定理が有効である．ポイントは一般の初期値を上下から挟むように，適当な球対称初期値を選び，対応する(PRS)の解を用いて評価することである．

まず(P)の弱解についてもその漸近挙動は(i) vanishing, (ii) small spreading, (iii) big spreading, (iv) transition の 4 タイプに分類できることを示した．

次に自由境界 $\Gamma(t) = \{x;\ u(t,x) = 0\}$ の振舞いを調べるために，$M(t) = \max_{x\in\Gamma(t)} |x|$ とおく．Du-Matano-Wang の結果を利用すれば，十分大きな t に対して

$$\Gamma(t) \subset \{x;\ M(t) - d_0\pi \le |x| \le M(t)\}, \qquad d_0 = \Omega_0\text{の直径},$$

となるから，$M(t)$ の評価が重要である．ここで (u,h) が small spreading 解ならば

(4.5) $$M(t) = c_1 t - (N-1)c_{1,*}\log t + O(1) \quad \text{as} \quad t \to \infty$$

を証明できた．同様に big spreading 解についても，対応する(SW)が解を持てば(4.5)と類似の結果が成立する．興味深いのはテラスを伴う big spreading 解の振舞いである．この解の自由境界についても(4.5)が成立する．解の挙動をより詳しく知るためにレベル集合 $\Gamma_\lambda(t) = \{x;\ u(t,x) = \lambda\}$ を定義する．例えば，$\lambda \in (u_1^*, u_3^*)$ に対して適当な定数 M_0 を選べば

$$\Gamma_\lambda(t) \subset \{x;\ c_B t - \frac{N-1}{c_B}\log t - M_0 \le |x| \le c_B t - \frac{N-1}{c_B}\log t + M_0\}$$

が成り立つ. この結果は(1)における球対称の結果と比較定理を組み合わせて示すことができた. このように、一般の初期値に対してもテラスを伴う big spreading 解の存在が示されたことは重要な成果である.

研究成果の主要部分は次の論文にまとめられている：

Yuki Kaneko, Hiroshi Matsuzawa and Yoshio Yamada, “A free boundary problem of nonlinear diffusion equation with positive bistable nonlinearity in high space dimensions I: Classification of asymptotic behavior,” Discrete Contin. Dyn. Syst., 42 (2022), pp. 2719-2745.

Yuki Kaneko, Hiroshi Matsuzawa and Yoshio Yamada, “A free boundary problem of nonlinear diffusion equation with positive bistable nonlinearity in high space dimensions II: Asymptotic profiles of solutions and radial terrace solution,” 投稿中.

Yuki Kaneko, Hiroshi Matsuzawa and Yoshio Yamada, “A free boundary problem of nonlinear diffusion equation with positive bistable nonlinearity in high space dimensions III: General case,” Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S, Early access, 2023.

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計7件（うち査読付論文　7件／うち国際共著　1件／うちオープンアクセス　0件）

１．著者名 Yuki Kaneko, HIroshi Matsuzawa and Yoshio Yamada	４．巻 -
２．論文標題 A free boundary problem of nonlinear diffusion equation with positive bistable nonlinearity in high space dimensions III: General case	５．発行年 2023年
３．雑誌名 Discrete and Continuous Dynamical Systems　Series S	６．最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3934/dcdss.2023089	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Yuki Kaneko, Hiroshi Matsuzawa and Yoshio Yamada	４．巻 42
２．論文標題 A free boundary problem of nonlinear diffusion equation with positive bistable nonlinearity in high space dimensions I : Classification of asymptotic behavior	５．発行年 2022年
３．雑誌名 Discrete and Continuous Dynamical Systems	６．最初と最後の頁 2719～2745
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3934/dcds.2021209	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Yoshio Yamada	４．巻 52
２．論文標題 Asymptotic properties of a free boundary problem for a reaction-diffusion equation with multi-stable nonlinearity	５．発行年 2020年
３．雑誌名 Rendiconti dell'Istituto di Matematica dell'Universita di Trieste	６．最初と最後の頁 65～89
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.13137/2464-8728/30771	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Mitsuki Kobayashi and Yoshio Yamada	４．巻 29
２．論文標題 Global existence of weak solutions to forest kinematic model with nonlinear degenerate diffusion	５．発行年 2020年
３．雑誌名 Advances in Mathematical Sciences and Applications	６．最初と最後の頁 187～209
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 Maho Endo, Yuki Kaneko and Yoshio Yamada	4．巻 40
2．論文標題 Free boundary problem for a reaction-diffusion equation with positive bistable nonlinearity	5．発行年 2020年
3．雑誌名 Discrete and Continuous Dynamical Systems	6．最初と最後の頁 3375～3394
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3934/dcds.2020033	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 Yuki Kaneko, Hiroshi Matsuzawa and Yoshio Yamada	4．巻 52
2．論文標題 Asymptotic Profiles of Solutions and Propagating Terrace for a Free Boundary Problem of Nonlinear Diffusion Equation with Positive Bistable Nonlinearity	5．発行年 2020年
3．雑誌名 SIAM Journal on Mathematical Analysis	6．最初と最後の頁 65～103
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1137/18M1209970	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 Michel Pierre, Takashi Suzuki and Yoshio Yamada	4．巻 68
2．論文標題 Dissipative reaction diffusion systems with quadratic growth	5．発行年 2019年
3．雑誌名 Indiana University Mathematics Journal	6．最初と最後の頁 291～322
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1512/iumj.2019.68.7447	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕　計3件（うち招待講演　2件／うち国際学会　0件）

1．発表者名 山田義雄
2．発表標題 反応拡散方程式の自由境界問題とテラス型伝播解
3．学会等名 徳島偏微分方程式小研究集会，徳島大学（招待講演）
4．発表年 2022年

１．発表者名 兼子裕大，松澤寛，山田義雄
２．発表標題 Positive bistable 項を伴う反応拡散方程式の自由境界問題に対する球対称解の漸近挙動
３．学会等名 日本数学会秋季総合分科会，北海道大学
４．発表年 2022年

１．発表者名 山田義雄
２．発表標題 数理生態学に現れる Stefan 型自由境界問題について
３．学会等名 東北大学解析セミナー，東北大学（招待講演）
４．発表年 2020年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

http://www.f.waseda.jp/yamada/

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考
研究協力者	松澤　寛 (Matsuzawa Hiroshi)		

６．研究組織（つづき）

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考
研究協力者	兼子　裕大 (Kaneko Yuki)		

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関