

令和 6 年 6 月 25 日現在

機関番号：38005

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2019～2023

課題番号：19K03574

研究課題名（和文）粘性解理論に基づくサブリーマン多様体上の非線形偏微分方程式の研究

研究課題名（英文）Nonlinear partial differential equations on sub-Riemannian manifolds based on viscosity solution theory

研究代表者

柳 青 (LIU, Qing)

沖縄科学技術大学院大学・幾何学的偏微分方程式ユニット・准教授

研究者番号：70753771

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,300,000円

研究成果の概要（和文）：ユークリッド空間のみならず，サブリーマン多様体のような複雑な幾何学的構造を持つ空間上の数学解析も近年重要視されている．本研究では，生物学や最適制御，画像処理など様々の分野に現れるサブリーマン多様体上の偏微分方程式を研究对象として，方程式の幾何学的性質について解析を行った．ユークリッド空間でよく知られている完全非線形方程式の粘性解理論をより一般的な幾何学的設定まで拡張した．空間の幾何学的特徴に応じた新しい凸集合，凸関数及び凸包の概念を考察し，非線形偏微分方程式の観点から理解を深めることができた．

研究成果の学術的意義や社会的意義

サブリーマン多様体における偏微分方程式の数学解析は，数学のみならず，生物学や工学などの問題にも様々な応用がある重要なテーマです．我々の研究は，複雑な幾何学的構造を持つ空間を理解するための枠組みを提供し，そのような空間における偏微分方程式及びその幾何学的性質の研究において基本的な数学的ツールを確立しました．現実世界の応用に現れる様々な数学モデルを研究するための数学的基盤を構築しました．

研究成果の概要（英文）：In recent years, the importance of mathematical analysis has been recognized not only in Euclidean spaces but also on sub-Riemannian manifolds with more complex geometric structures. In this research project, we studied partial differential equations in sub-Riemannian manifolds arising from various fields including biology, optimal control theory and image processing, focusing on the analysis of their geometric properties. We extended the well-established viscosity solution theory for fully nonlinear equations in Euclidean spaces to more general geometric settings. Additionally, we investigated new notions of convex sets, convex functions and convex envelopes that align with the space geometric properties, leading to a deeper understanding from the perspective of partial differential equations.

研究分野：数学解析

キーワード：非線形偏微分方程式 サブリーマン多様体 粘性解 凸関数 凸集合

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

サブリーマン多様体上の非線形偏微分方程式は、生物学や機械工学などの分野に重要な応用があり、数学解析の重要な課題の一つと認識されている。現代科学の最先端の研究へ直接的に貢献するための数学的基礎理論を発展させることが本研究のモチベーションである。ユークリッド空間とは本質的に異なる構造をもつため、サブリーマン多様体において微分方程式の可解性問題や解の基本性質などが研究問題として次々と提起され、多くの研究者の関心を寄せている。

2. 研究の目的

本研究の目的は、ユークリッド空間で構築された完全非線形方程式の理論をハイゼンベルグ群まで拡張し、サブリーマン多様体に適用できる新たな解析方法を確立することである。特に、粘性解理論を積極的に取り入れることで、空間の特殊性により現れる方程式の退化性を克服し、幾何学的解析の新しい発展や生物学、機械工学などの問題解決の実現を目指す。

3. 研究の方法

従来の非線形サブリーマン解析は、主に変分法による弱解の概念を利用して行われる。発散型楕円作用素を持つ方程式に対しては、この方法が有効であるが、ハミルトン・ヤコビ方程式やレベルセット曲率流方程式などの非発散型方程式ならば、変分的構造を持たないので、同様な方法では解の存在性と一意性が得られない。完全非線形偏微分方程式の粘性解は最大値原理に築き上げられた弱解の理論であるから、変分的構造のない方程式にも応用できる。我々は粘性解理論による手法を積極的に取り入れ、サブリーマン多様体において比較定理を構築し、偏微分方程式の可解性と幾何学的性質について考察する。

4. 研究成果

(1) ハイゼンベルグ群における凸関数の定義はユークリッド空間の場合と異なることを確認し、それに応じた関数の凸包の概念および具体的な構成の方法を確立した。さらに、対称性を持つ完全非線形楕円型方程式に対し、定義した凸包を利用することにより解の凸性を示すことができた。これらの研究成果は沖縄科学技術大学院大学のX. Zhou氏との共同研究によるものであり、論文は国際ジャーナルAnn. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci.に掲載された。

(2) ハイゼンベルグ群における関数の凸包の概念や構成法について以前の研究で考察したが、それに対応する集合の凸包をどのように構築するかは知られていなかった。沖縄科学技術大学院大学のA. Kijowski氏とX. Zhou氏との共同研究では、ハイゼンベルグ群における準凸関数の性質を用いて、集合の凸包の新たな構成法を確立した。準凸関数を一つ非局所的ハミルトン・ヤコビ方程式の粘性劣解で特徴づけられることを明らかにし、さらにその方程式に基づく離散化スキーム及びレベルセット法により、集合の凸包の構成に成功した。これらの研究結果に関する論文は国際ジャーナルRev. Mat. Iberoam.に掲載された。

(3) 曲率タイプの二階楕円型作用素によるハイゼンベルグ群上の準凸関数の特徴づけを考察し、方程式の粘性劣解の形で準凸関数になるための必要条件と十分条件を導いた。従来の結果よりも、より一般的な函数クラスでハイゼンベルグ群上の準凸関数と二階非線形楕円型方程式との関係を明らかにし、理解を深めることができた。さらに、この結果を用い、未解決問題であるハイゼンベルグ群上の曲率流の凸保存性についても研究を行った。初期値の幾何学的構造に対する一定の仮定の下で部分的な結果を得られた。これらの成果をまとめた論文は現在投稿中である。

(4) 完全非線形放物型方程式について粘性解の冪乗型の凸性を考察した。これまでは、楕円型と放物型方程式の古典解の凸性に関する結果が知られていたが、一般の完全非線形方程式に拡張する際に、解の2階微分可能性が期待できないため、凸性の証明は困難だと思われる。東京大学の石毛和弘氏とフィレンツェ大学のP. Salani氏の共同研究では、冪乗型の凸性に対する関数の凸包を定義し、粘性解の手法で一般的な放物型方程式の解の凸性を明らかにした。この研究に関する論文は国際ジャーナルJ. Math. Pures Appl.に掲載された。

(5) 距離空間におけるアイコナル方程式の可解性について研究を行った。近年、最適輸送やデータサイエンスなどの分野につながるため、一般の距離空間上の非線形解析に関する研究が注目されている。その基礎的な課題の一つとして、距離空間上のアイコナル方程式の可解性問題は関心を集めている。ユークリッド空間上の粘性解理論に基づいた2種類の解の概念がそれぞれGiga-Hamamuki-NakayasuとGangbo-Swiechの研究によって提唱された。しかし、これらの解がどのような関係なのかは知られていなかった。シンシナティ大学のN. Shanmugalingam氏と沖縄科学技術大学院大学のX. Zhou氏との共同研究では、新たにMonge解の概念を導入し、最適制御の手法を用いて全ての解の概念が同値であることを明らかにした。この結果によって、今までの先行研究で確立された定式化及び定理などを全て統一することができた。本研究の成果をまとめた論文は国際ジャーナルJ. Differential Equationsに掲載された。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計15件（うち査読付論文 13件 / うち国際共著 2件 / うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Kijowski Antoni, Liu Qing, Zhou Xiaodan	4. 巻 40
2. 論文標題 Horizontally quasiconvex envelope in the Heisenberg group	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Revista Matematica Iberoamericana	6. 最初と最後の頁 57 ~ 92
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4171/RMI/1417	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kagaya Takashi, Liu Qing, Mitake Hiroyoshi	4. 巻 2277
2. 論文標題 Quasiconvexity preserving property for first order nonlocal evolution equations	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 RIMS Kokyuroku	6. 最初と最後の頁 57 ~ 69
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kagaya Takashi, Liu Qing, Mitake Hiroyoshi	4. 巻 30
2. 論文標題 Quasiconvexity preserving property for fully nonlinear nonlocal parabolic equations	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00030-022-00818-8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Qing Liu, Xiaodan Zhou	4. 巻 22
2. 論文標題 Horizontal convex envelope in the Heisenberg group and applications to sub-elliptic equations	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Annali Scuola Normale Superiore - Classe di Scienze	6. 最初と最後の頁 2039 ~ 2076
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2422/2036-2145.201907_001	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hamamuki Nao, Liu Qing	4. 巻 2
2. 論文標題 A game-theoretic approach to dynamic boundary problems for level-set curvature flow equations and applications	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Partial Differential Equations and Applications	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s42985-021-00076-w	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Takashi Kagaya, Qing Liu	4. 巻 53
2. 論文標題 Singular Neumann boundary problems for a class of fully nonlinear parabolic equations in one dimension	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 SIAM Journal on Mathematical Analysis	6. 最初と最後の頁 4350 ~ 4385
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1137/20m1371646	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Qing Liu	4. 巻 47
2. 論文標題 Semiconvexity of viscosity solutions to fully nonlinear evolution equations via discrete games	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Geometric Properties for Parabolic and Elliptic PDE's, Springer INdAM Series	6. 最初と最後の頁 205 ~ 231
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-3-030-73363-6_10	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Qing Liu, Nageswari Shanmugalingam, Zhou Xiaodan	4. 巻 272
2. 論文標題 Equivalence of solutions of eikonal equation in metric spaces	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Differential Equations	6. 最初と最後の頁 979 ~ 1014
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jde.2020.10.018	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Yoshikazu Giga, Qing Liu, Hiroyoshi Mitake	4. 巻 120
2. 論文標題 On a discrete scheme for time fractional fully nonlinear evolution equations	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Asymptotic Analysis	6. 最初と最後の頁 151 ~ 162
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3233/ASY-191583	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Qing Liu	4. 巻 20
2. 論文標題 Large exponent behavior for power-type nonlinear evolution equations and applications	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Evolution Equations	6. 最初と最後の頁 777 ~ 810
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00028-019-00539-z	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Qing Liu	4. 巻 85
2. 論文標題 On an obstacle problem arising in large exponent asymptotics for one dimensional fully nonlinear diffusions of power type	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Advanced Studies in Pure Mathematics	6. 最初と最後の頁 281 ~ 289
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2969/aspm/08510281	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Nao Hamamuki, Qing Liu	4. 巻 26
2. 論文標題 A deterministic game interpretation for fully nonlinear parabolic equations with dynamic boundary conditions	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 ESAIM Control Optim. Calc. Var.	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1051/cocv/2019076	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Qing Liu	4. 巻 22
2. 論文標題 The vanishing exponent limit for motion by a power of mean curvature	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Interfaces Free Bound.	6. 最初と最後の頁 51 ~ 84
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4171/IFB/432	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kazuhiro Ishige, Qing Liu, Paolo Salani	4. 巻 -
2. 論文標題 Parabolic Minkowski convolutions and concavity properties of viscosity solutions to fully nonlinear equations	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 J. Math. Pures Appl.	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.matpur.2019.12.010	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Qing Liu	4. 巻 2146
2. 論文標題 Large exponent asymptotics for one dimensional fully nonlinear diffusion of power type	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 京都大学数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 9 ~ 20
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計20件 (うち招待講演 20件 / うち国際学会 10件)

1. 発表者名 柳青
2. 発表標題 A PDE-based approach to Borell-Brascamp-Lieb inequality
3. 学会等名 深江における非線形偏微分方程式研究集会 (招待講演)
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 Qing Liu
2. 発表標題 A representation formula for viscosity solutions of nonlocal Hamilton-Jacobi equations and applications
3. 学会等名 Probabilistic and game theoretical interpretation of PDEs, Autonomous University of Madrid (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Qing Liu
2. 発表標題 First order fully nonlinear nonlocal evolution equations
3. 学会等名 Minisymposium Nonlinear PDEs and Related Diffusion Phenomena, 10th International Congress on Industrial and Applied Mathematics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Qing Liu
2. 発表標題 Principal eigenvalue problem for infinity Laplacian in metric spaces
3. 学会等名 Variational Methods for Nonlinear PDEs, Cardiff University (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 柳青
2. 発表標題 Quasiconvexity preserving property for fully nonlinear nonlocal parabolic equations
3. 学会等名 早稲田大学応用解析研究会 (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 柳青
2. 発表標題 Quasiconvexity preserving property for fully nonlinear nonlocal parabolic equations
3. 学会等名 研究集会「発展方程式における系統的形状解析及び漸近解析」(招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Qing Liu
2. 発表標題 Quasiconvexity preserving property for fully nonlinear nonlocal parabolic equations
3. 学会等名 Asia-Pacific Analysis and PDE Seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Qing Liu
2. 発表標題 Quasiconvexity preserving property for fully nonlinear nonlocal parabolic equations
3. 学会等名 RIMS研究集会「発展方程式論の革新：異分野との融合がもたらす理論の深化」(招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 柳青
2. 発表標題 Horizontal quasiconvex functions in the Heisenberg group
3. 学会等名 広島数理解析セミナー (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Qing Liu
2. 発表標題 Principal eigenvalue problem for infinity Laplacian in metric spaces
3. 学会等名 Hong Kong University of Science and Technology PDE seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 柳青
2. 発表標題 Principal eigenvalue problem for infinity Laplacian in metric spaces
3. 学会等名 神戸大学解析セミナー (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 柳青
2. 発表標題 Eikonal equations on metric spaces
3. 学会等名 九州関数方程式セミナー (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 柳青
2. 発表標題 Equivalence of solutions of eikonal equation on metric spaces
3. 学会等名 第45回偏微分方程式論札幌シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 柳青
2. 発表標題 On the horizontal convex envelope in the Heisenberg group
3. 学会等名 九州関数方程式セミナー（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 柳青
2. 発表標題 A deterministic game interpretation for fully nonlinear parabolic equations with dynamic boundary conditions
3. 学会等名 金沢解析セミナー（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Qing Liu
2. 発表標題 Large exponent behavior for power curvature flow and applications
3. 学会等名 PDE seminar, New York University Shanghai（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Qing Liu
2. 発表標題 A deterministic game interpretation for fully nonlinear parabolic equations with dynamic boundary conditions
3. 学会等名 The Sixth Italian-Japanese Workshop on Geometric Properties for Parabolic and Elliptic PDE's（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Qing Liu
2. 発表標題 A deterministic game interpretation for fully nonlinear parabolic equations with dynamic boundary conditions
3. 学会等名 Nonlinear Averaging and PDEs (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 柳青
2. 発表標題 Parabolic Minkowski convolutions and concavity properties of viscosity solutions to fully nonlinear equations
3. 学会等名 南大阪応用数学セミナー (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Qing Liu
2. 発表標題 Parabolic Minkowski convolutions and concavity properties of viscosity solutions to fully nonlinear equations
3. 学会等名 The 37th Kyushu Symposium on Partial Differential Equations (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計2件

国際研究集会 OIST Conference Geometric PDEs and Applications	開催年 2023年～2023年
国際研究集会 Viscosity solution approach to asymptotic problems in front propagation, dynamical system and related topics	開催年 2019年～2019年

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
米国	University of Cincinnati			
イタリア	University of Florence			