様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　５ 年　４ 月 ２８ 日現在

機関番号：１０１０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2019～2022
課題番号：１９Ｋ０３５７５

研究課題名（和文）超幾何関数の漸近解析と大域解析

研究課題名（英文）Asymptotic and global analysis of hypergeometric functions

研究代表者
岩崎　克則（Iwasaki, Katsunori）

北海道大学・理学研究院・教授

研究者番号：００１７６５３８

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　3,300,000円

研究成果の概要（和文）：超幾何関数のガンマ乗積公式に対して、双対性と相互性という対称性を導入した。これにより、ガンマ乗積公式のもつ算術的な性格を明らかにした。大きなパラメータをもつ超幾何級数に対して、従来より得ていた離散鞍点法を拡張強化した。超幾何方程式のモノドロミー群をモデルとする行列群を超幾何群という。超幾何群の性質を研究し、超幾何格子の理論を展開した。その応用として、正の位相的エントロピーをもつ K3 曲面自己同型を生成する超幾何群の方法を発見し、K3曲面上の複素力学系に応用した。

研究成果の学術的意義や社会的意義
超幾何関数は、超幾何微分方程式の解として定義され、数学や数理物理学のさまざまの分野に現れる重要な関数である。この関数が満たす関係式や、漸近的性質、大域的性質を研究すること、及びその結果を様々なテーマに応用することは重要である。本研究で、ガンマ乗積公式の算術性を明らかにし、離散鞍点法を強化したことは、解析学に新しい知見をもたらすことになる。また超幾何群の理論を展開し、一見無関係に見える複素曲面上の力学系に応用したことは意外性があり、複素力学系の分野の発展に資するものである。

研究成果の概要（英文）：For gamma product formulas for hypergeometric functions we introduced two symmetries called duality and reciprocity, thereby clarified the arithmetic nature of gamma product formulas. We extended and strengthened the discrete saddle point method for hypergeometric series with a large parameter. A hypergeometric group is a matrix group modeled on the monodoromy group of a hypergeometric equation. We studied the properties of hypergeometric groups and developed a theory of hypergeometric lattices. As an application, we discovered the method of hepergeometric groups for constructing K3 surface automorphisms of positive topological entropy and applied it to the dynamics on K3 surfaces.

研究分野：微分方程式論、複素幾何学

キーワード：超幾何関数　漸近解析　離散鞍点法　大域解析　モノドロミー群　超幾何群　K3曲面　正則自己同型

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

超幾何関数において、パラメータや独立変数が特別な値をとるとき、超幾何関数がいくつかのガンマ関数や初等関数の乗積の形に表されることがある。これを超幾何関数のガンマ乗積公式という。ガンマ乗積公式は、さまざまな応用をもつ興味深い対象であるので、以前からたくさんの公式が発見されてきた。近年は、計算機の発展に伴って、アルゴリズム的な研究も盛んである。しかし、公式をできるだけたくさん発見して増やすというのが、この分野の従来の方向性であった。それに飽き足らず、そもそもなぜガンマ乗積公式が存在するのかという根源的な理由を探り、そのような公式が存在するための条件を発見し、公式の在処を絞り込む方向性の研究が必要であった。ガンマ乗積公式をもつような超幾何関数のパラメータや独立変数には算術的な香りが漂う。また、最近、ガンマ乗積公式の発見法として、超幾何関数の隣接関係式を利用する方法が蛭子 彰仁により考案された。これらの意味するところは何か？という問題意識に駆られて新しい研究を開始した。 そして、先の研究課題（課題番号 16K05165）で出版した論文 K. Iwasaki, Hypergeometric series with gamma product formula, Indag. Math. **28** (2017), no. 2, 463-493 において最初の成果を得た。これは、ガンマ乗積表示をもつ超幾何関数のパラメータの主要部が整数または半整数でなければならないという算術性や、ある場合にはすべてのガンマ乗積公式が隣接関係式の方法で得られることを証明したものであった。しかし、さらに解明すべき問題が残っていたため、本研究課題に引き継がれた。

さて、上述の隣接関係式の方法に留まらず、超幾何関数の隣接関係式は、それ自体として興味深い研究対象である。そこで、超幾何関数 3F2(1)の場合に、三項隣接関係式の理論展開を行ったのが、先の研究課題（課題番号 16K05165）で発表した論文 A. Ebisu, K. Iwasaki, Three-term relations for 3F2(1), J. Math. Anal. Appl. **463** (2018), no.2, 593-610 であった。また、この結果を 3F2(1)の連分数展開の漸近解析に応用したのが、論文 A. Ebisu, K. Iwasaki, Contiguous relations, Laplace’s methods, and continued fractions for 3F2(1), Ramanujan J. **49** (2019), no. 1, 159-213 であった。後者の論文では、超幾何級数のパラメータに関する漸近展開を実行する方法として、離散鞍点法を導入した。これは、超幾何関数 3F2(1)への応用を目的としたため、超幾何級数が独立変数を含まない場合の離散鞍点法であった。そこで、独立変数を含む場合の離散鞍点法の開発は、本研究課題に持ち越された。

2 階の複素微分方程式である Gauss 超幾何方程式を一般の階数に拡張した方程式を一般超幾何方程式という。一般超幾何方程式の解の多価性や大域挙動はモノドロミー群によって測られる。モノドロミー群をモデルとする行列群を超幾何群という。Beukers-Heckman は、一般超幾何方程式の代数関数解を分類するために、有限超幾何群の分類を行った。他方、超幾何群は多様な無限群を含んでいる。そこで、無限超幾何群の理論を整備し、それを他の数学に応用することを発案した。この流れにおいて、意外な応用として取上げたのが、K3 曲面上の複素力学系である。

McMullen は、複素力学系において特徴的な不変集合である Siegel 円板をもつ K3 曲面自己同型を構成することに成功した。これは、K3 曲面の周期に対する Torelli 型定理、位相的エントロピー、Salem 数と呼ばれる代数的整数、Atiyah-Bott の不動点公式、非線形写像の不動点の周りでの Siegel 線形化、代数的数の有理数近似など、様々の数学を組み合わせた見事な構成であった。これに、超幾何群の理論を当ててみたら何が起こるだろう？という、いささか素朴な思いつきから始まったのが今回の研究である。それだけに意外性のあるテーマの取合せであった。

２．研究の目的

超幾何関数のガンマ乗積公式の研究においては、先の研究課題（課題番号 16K05165）の成果を継承して、それをさらに深めることが目的であった。具体的には、先の研究では、ガンマ乗積公式をもつ超幾何関数のパラメータの主要部が算術性をもつ、すなわち整数値や半整数値をとることが示されていたが、主要部以外のパラメータも算術性をもつこと、すなわち有理数となることは示されておらず、予想に留まっていた。また有限性の予想、すなわちパラメータの主要部があらかじめ指定されたとき、これを実際にパラメータの主要部とするガンマ乗積公式は高々有限個しか存在しないだろうという予想も未解決の状態であった。そこで、これらの予想を解決することが本研究課題の一つの目的となった。

大きなパラメータをもつ超幾何級数に対する離散鞍点法の開発については、開始当初の背景の欄でも書いたとおり、超幾何級数が独立変数を含む場合に、離散鞍点法を拡張する。独立変数が入ることで、相関数や振幅関数に修正を加える必要があると思われるので、それを実行する。また、古典的な Gauss 連分数の場合でも、打切り誤差の漸近展開の主要部の具体形を記述した文献が見当たらないので、拡張した離散鞍点法の応用として、これをきっちりと決めるのが目的であった。さらに１変数の離散鞍点法を、多変数化するための足掛かりを得ることも目指した。

超幾何群の理論ついては、まずは Beukers-Heckman の研究を一般化する形で理論整備を行うことを目的とした。すなわち、複素数体上定義された超幾何群の不変エルミート形式、実数体上定義された超幾何群の不変対称形式の指数を表現公式の整備であった。また、整数環上定義された超幾何群に付随する超幾何格子を導入し、その格子理論的な研究を行うことを次の目的とした。これは、超幾何格子のユニモデュラー条件を確立すること、超幾何格子上の Hodge 構造の考察を行うことなどであったが、この基盤整備の下に、以下の応用に繋げるための準備でもあった。

超幾何群の理論の K3 曲面上の複素力学系への応用については、超幾何群と超幾何格子を用いて、K3 曲面上の正エントロピーをもつ正則自己同型を数多く構成することが目的であった。その内容を述べるために、K3 曲面とその上の正則自己同型が誘導する種々の代数的構造についてまとめておく。K3 曲面の整数係数中間コホモロジー群は、交叉形式に関して、階数が 22 で指数が-16 のユニモデュラー偶格子となる。このような格子を K3 格子という。K3 曲面の複素構造は、K3 格子上に Hodge 構造を定め、さらに正錐と Kähler 錐を定める。これらを K3 曲面の K3 構造という。K3 構造はさらに Picard 格子、ルート系、Weyl 群などの構造を定める。また K3 曲面の正則自己同型は、Hodge 構造を保つ K3 格子の自己同型、すなわち Hodge 等長変換を誘導し、さらに K3 構造を保存する。 ここで、正錐を保つような Hodge 等長変換を正の Hodge 等長変換という。正の Hodge 等長変換は、楕円型、放物型、双曲型の３型に分けられる。正エントロピーをもつ自己同型からは、双曲型の Hodge 等長変換が誘導される。逆に K3 構造を保存する双曲型の Hodge 等長変換は、K3 曲面の周期写像の全射性と Torelli 型定理により、正エントロピーをもつ K3 曲面自己同型に持ち上がる。そこで、本研究では、超幾何群・超幾何格子を用いて、K3 構造と、それを保存する双曲型 Hodge 等長変換を多数構成することが目的となった。また、この方法で構成した K3 曲面自己同型を Siegel 円板の研究に資することを企図した。

３．研究の方法

研究期間の初期においては、主に超幾何関数のガンマ乗積公式や離散鞍点法の研究を行った。その後は、超幾何群・超幾何格子の理論展開と、その K3 曲面上の複素力学系への応用へと軸足を移した。前者においては、ガンマ乗積公式にある種の対称性の理論を導入することが主要な仕事となった。また後者においては、超幾何群に関する Beukers-Heckman の研究や、K3 曲面上の

力学系に関する McMullen の研究を詳細に読み込んで、本研究課題への体制を整えた。

本研究課題に必要な知識を得るために、超幾何方程式研究会、アクセサリーパラメータ研究会、日本数学会年会・秋季総合分科会、特殊関数に関する海外での研究集会、あるいは北海道殊関数セミナーへ等に出席して、情報収集を行った。また、これらの研究集会で、研究の途中経過報告や成果発表を行った。研究者交流としては、超幾何関数の特殊値公式や隣接関係式の専門家である蛭子 彰仁や、複素多様体上の力学系の専門家で K3 曲面上の複素力学系に詳しい上原 崇人等と情報交換を行った。また、超幾何群の方法による K3 曲面上の力学系の研究に関しては、指導する博士課程の学生の高田 佑太と共同研究を行った。

超幾何群の方法では、超幾何群の生成元のデータから K3 曲面自己同型を得るための種々の計算や、K3 曲面上の不変集合や例外集合の考察を、最終的には、大規模ではあるが初等的な行列計算へ還元することができる。この計算のためのアルゴリズムを開発し、数式処理システム Mathematica に実装した。そのアルゴリズムや計算データは、研究代表者の HP 上に公開した。

４．研究成果

超幾何級数のガンマ乗積公式に関しては、論文 K. Iwasaki, Duality and reciprocity for hypergeometric series with a gamma product formula, Kyushu J. Math. 73 (2019), no.2, 251--294 が印刷公表された。この論文では、ガンマ乗積公式に対して、双対性 (duality)と相互性(reciprocity)と呼ばれる対称性を導入した。これらの対称性は、超幾何関数が、あるパラメータと独立変数についてガンマ乗積公式をもつならば、別のパラメータと独立変数についてもガンマ乗積公式をもつことを主張するものである。この結果は、一つのガンマ乗積公式が、より多くのガンマ乗積公式を自動的に生成することを可能にするとともに、ガンマ乗積公式の構造論自身に深い帰結をもたらした。すなわち、一つのガンマ乗積公式と、それを対称性で変換したガンマ乗積公式が同時に存在しなければならないことから、ガンマ乗積公式が存在するようなパラメータと独立変数には、強い算術的制限がかかることが導かれた。この事実を用いると、研究目的の欄で述べたような有限性と算術性に関する予想が証明できた。つまり、パラメータの主要部を与えたとき、実際にそれをパラメータの主要部とするガンマ乗積公式はたかだか有限個しかないこと、主要部以外のパラメータも有理数でなければならないことを証明し、すべてのガンマ乗積公式を得るためのアルゴリズムを与えることができた。これらは、この分野に従来なかった種類の結果であり、この分野の発展に資することが大であると考えられる。

次に、大きなパラメータをもつ超幾何級数に対する離散鞍点法を、級数が独立変数を含む場合に拡張した。これは細やかな一般化であるが、このことにより離散鞍点法の適用範囲が大きく広がった点に意義がある。この方法を Gauss の超幾何連分数へ応用し、打ち切り誤差の漸近展開の主要項を決定した。この結果をプレプリント K. Iwasaki, Discrete Laplace method and truncation error of Gauss continued fraction, e-Print arXiv: 1904.03350 [math.CA] 2019, 17 pp. にまとめた。これはまだ途中報告であるが、今後、さらに多変数の超幾何関数等に一般化して、正式な論文としてまとめて行けたら幸いである。また、関連する結果を、直交多項式と特殊関数に関する国際研究集会 15th International Conference on Orthogonal Polynomials, Special Functions and Applications, Johannes Kepler Univ.（オーストリア）において、Discrete Laplace method and hypergeometric continued fraction と題して発表した。

超幾何群の理論の展開と K3 曲面上の複素力学系への応用については、最初の成果が論文 K. Iwasaki, Y. Takada, Hypergeometric groups and dynamics on K3 surfaces, Math. Z. 301 (2022), no. 1, 835-891 として印刷公表された。これは、指導する大学院生の高田 佑太との共

著である。

超幾何群の理論については、まず複素超幾何群の不変エルミート形式の指数を決定する公式を与えた。もともと Beukers-Heckman によって、超幾何群の生成元の一つである行列の固有値が単位円板上に乗っている場合に、指数の絶対値を記述する公式が知られていた。本研究では、上記の行列の固有値に対するクラスターの概念を導入して、固有値が一般の配置にあるときに指数公式を拡張した。その応用として、超幾何群が Lorentz 型になる場合を分類した。次に実超幾何群に対してトレースクラスターの概念を導入して、不変対称形式の指数を記述する公式を与えた。さらに整数環上で定義された超幾何群に対して、この群が格子同型として作用するような偶格子を導入した。これを超幾何格子という。そして超幾何格子がユニモデュラーとなるための必要十分条件を与えた。また、超幾何格子上の Hodge 構造を考察するために、指数の概念を局所化して、局所指数の概念を導入した。そして局所指数をクラスターやトレースクラスターの言葉で記述した。このような展開を通して、超幾何群と超幾何格子の理論的整備を行った。

超幾何群の理論の K3 曲面上の複素力学系への応用に関する成果を述べる。まず、超幾何格子が K3 格子となる場合を分類した。これを超幾何 K3 格子という。超幾何群の生成元 F をこの格子に作用させるとき、F が正の Hodge 等長変換となるような Hodge 構造をを超幾何 K3 格子に付与した。この超幾何 Hodge 構造は、F のある特別な固有値(special eigenvalue)の情報によって特徴づけられる。そこで F が楕円型、放物型、双曲型となる場合を、それぞれ special eigenvalue の言葉で特徴づけた。さらに、付随する Picard 格子に対する特別の基底を導入して、標準基底と呼んだ。このような良い基底を定義できるところが、超幾何群の方法の利点である。

以後、正エントロピーの場合に対応する双曲型の Hodge 等長変換の場合を主に取り扱った。F は一般に Kähler 錐を保存しないので、そのままでは周期写像によって K3 曲面自己同型に持ち上げることはできない。そこで Kähler 錐を保存するように、F を適当な Weyl 群の元 w で捩じって w・F の形に改変する必要があった。そこで、上記の標準基底をうまく利用して、所望の Weyl 群の元 w を決定するアルゴリズムを開発した。またこのアルゴリズムを数式処理システム Mathematica 上に実装した。さて、改変した行列 w・F は周期写像によって正のエントロピーをもつ K3 曲面自己同型 $f : X \to X$ に持ち上がる。このとき special eigenvalue は、ある Salem 数 $\lambda>1$ に Galois 共役であるような絶対値 1 の代数的整数となる。そして自己同型 f のエントロピーは Salem 数 λ の対数 $\log\lambda>0$ となる。

以上の過程を逆にすると、与えられた Salem 数 λ から出発して、その対数 $\log\lambda$ をエントロピーとしてもつ K3 曲面自己同型が構成できると期待される。そこで、本研究では、McMullen が扱ったいくつかの 22 次 Salem 数、及びこれまでに知られている最小の Salem 数である Lehmer 数を例にとって、多数の K3 曲面自己同型を構成してみせた。また構成した自己同型の多くには Siegel 円板が存在することを示した。これは、超幾何群の方法の有効性を示す結果である。この方法をさまざまの Salem 数に適用して、さらに数多くの K3 曲面自己同型を構成し、それらを K3 曲面上の複素力学系の研究に役立てていくのは、本研究課題に続く新しい研究課題（課題番号 22K03365）の役割となる。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計2件（うち査読付論文　2件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　0件）

１．著者名 Iwasaki Katsunori、Takada Yuta	４．巻 301
２．論文標題 Hypergeometric groups and dynamics on K3 surfaces	５．発行年 2022年
３．雑誌名 Mathematische Zeitschrift	６．最初と最後の頁 835～891
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00209-021-02912-6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Katsunori Iwasaki	４．巻 73
２．論文標題 Duality and reciprocity for hypergeometric series with a gamma product formula	５．発行年 2019年
３．雑誌名 Kyushu Journal of Mathematics	６．最初と最後の頁 251-294
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2206/kyushujm.73.251	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

〔学会発表〕　計8件（うち招待講演　3件／うち国際学会　2件）

１．発表者名 岩崎　克則
２．発表標題 超幾何群をめぐって
３．学会等名 アクセサリーパラメーター研究会2022
４．発表年 2022年

１．発表者名 高田　祐太、岩崎　克則
２．発表標題 K3 曲面上の Siegel 円板と Picard 数
３．学会等名 2021 年度日本数学会秋季総合分科会
４．発表年 2021年

１．発表者名
高田　祐太、岩﨑　克則

２．発表標題
超幾何群、K3 格子、ルート系

３．学会等名
超幾何方程式研究会2021

４．発表年
2021年

１．発表者名
岩﨑　克則、高田　佑太

２．発表標題
超幾何群から K3 曲面上の Siegel 円板へ

３．学会等名
2020年度日本数学会秋季総合分科会

４．発表年
2020年

１．発表者名
岩﨑　克則

２．発表標題
超幾何群と K3 力学系

３．学会等名
北海道大学数学教室談話会（招待講演）

４．発表年
2020年

１．発表者名
Katsunori Iwasaki

２．発表標題
Hypergeometric groups and K3 lattices

３．学会等名
Differential Systems: from Theory to Computer Mathematics（招待講演）（国際学会）

４．発表年
2019年

１．発表者名 岩﨑　克則
２．発表標題 超幾何群が生成する格子について
３．学会等名 熊本大学数学談話会（招待講演）
４．発表年 2019年

１．発表者名 Katsunori Iwasaki
２．発表標題 Discrete Laplace method and hypergeometric continued fractions
３．学会等名 15th International Conference on Orthogonal Polynomials, Special Functions and Applications（国際学会）
４．発表年 2019年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

Katsunori Iwasaki, Discrete Laplace method and truncation error of Gauss continued fraction, e-Print arXiv: 1904.03350 (2019), 17 pp. Katsunori Iwasaki, Yuta Takada, Hypergeometric Groups and Dynamics on K3 Surfaces, Mathematica Programs, https://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~iwasaki/

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考
研究協力者	高田　佑太 (Takada Yuta)		

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関