

令和 6 年 6 月 23 日現在

機関番号：10101

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2019～2023

課題番号：19K03576

研究課題名(和文) 複雑領域における楕円型方程式系のスペクトル解析と応用

研究課題名(英文) Spectral analysis of elliptic PDE system in complicated domains and application

研究代表者

神保 秀一 (JIMBO, Shuichi)

北海道大学・理学研究院・特任教授

研究者番号：80201565

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,300,000円

研究成果の概要(和文)：1. 弾性体の变形や振動のモデル方程式であるラメの方程式系に対するスペクトル(固有値)問題を研究した。弾性体に小さな穴や細い曲がった柱状欠損がある際に各固有値が漸近的にどうなるかを考察しその固有値の摂動を表す漸近挙動の公式を研究した。2次元の領域(弾性体に相当)に小さな穴があるときの固有値の摂動公式を証明した。その際に2次元円環領域の斉次のラメ方程式系の境界値問題の解の具体的な表現公式を得た。次に3次元の領域で細いトンネルがある場合についても同様の成果を得た。上記の研究の延長とみなせる。

2. 1. の同じ課題をストークス方程式系のスペクトル問題に取り組み同様の結果を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

ラプラシアン等の2階楕円型作用素では同様の先行の研究結果は知られていたが、ラメの方程式系やストークスの方程式系ではこのような結果は得られていなかったため、このような物理的背景をもつ偏微分方程式の領域依存性に関する理解の深化に貢献している。また工学的あるいは物理的な背景もつ成果なので諸科学の分野の基礎を固めることにもつながっている。

研究成果の概要(英文)：1. We studied the spectral problem of the Lamé system which is a model equation of deformation or oscillation of an elastic body. I studied the case that the body has a small hole or a thin tunnel and obtained a perturbation formula of each eigenvalue. In that process of research we considered the boundary value problem of the homogeneous Lamé system in a 2d annulus and got an explicit expression of the solution which takes an infinite sequence of fundamental solution basis. Subsequently we studied the 3dimensional body with a thin tunnel and obtained a similar formula.

2. Similarly to the item 1, we studied the same spectral problem for the Stokes system and obtained the corresponding results.

研究分野：偏微分方程式, 応用解析学

キーワード：ラメ方程式系 ストークス方程式系 スペクトル問題 特異領域変形

様式 C - 19、F - 19 - 1 (共通)

1. 研究開始当初の背景

音、光や物質の波動や振動の現象で事象を特徴付ける重要な量はそれが起こる空間や媒質の形状に本質的に影響を受ける。代表例をあげると吹奏楽器では、空洞の形が励起される音程を決めるファクターとなる。地震が建造物を振動させる際には共鳴の発生が、亀裂や欠陥の有無など関連する。塔や橋の振動特性も幾何的要因が本質的に重要となる。流体现象も同様である。これらの関連性は数学モデルに舞台を移すと解やそれに関わる量の領域形状依存性の課題となる。その際作用素のスペクトル(固有値)問題が重要な課題となる。この観点から数学解析のはじまりはアダマールやクーラン・ヒルベルト、シッファー・スペンサーや数学概論(寺沢寛一編)等の文献で知ることができる。それ以降ラプラシアンや2階楕円型作用素(シュレディンガー作用素など)のスペクトルの領域依存性の研究は多くなされた。本研究者も特異領域変形とラプラシアン等の固有値の摂動公式について取り組んだ。一方、ラメの作用素やストークス作用素の固有値問題について精密な研究は少ない。個別的には Ciarlet *Mathematical Elasticity* (3巻) は、薄い板状領域におけるラメのシステムの解析に詳しい。外力および境界条件を与えた時の変形を記述する問題を数学的に解き、薄さの極限において2次元領域における極限方程式を得る研究成果を記述している。古典的な Von Karman の作用素が正当化された。また、細い棒が1次元集合に退化するケースは Irigoien, Kerdid, Viano, Irigoien-Viano, Tambaca 等によって解析され極限方程式として1次元集合上の常微分方程式が得られた。以上では断面が一定形の場合であったが、本研究者と A. Rodriguez-Mulet の共同研究で一般化された。これらの研究はあるクラスの変形モードであったが、他には Torsion mode, Stretching mode の固有値のクラスに関してはまだはっきりしていない。ゼロに近づかないこれらの固有値のクラスに対する精密な特徴付けも一つの新たな課題である。一方小さな穴がある領域の場合のラプラシアンや単独楕円型作用素の固有値の摂動問題では Swanson, Ozawa, Besson, Chavel-Feldman その他(本研究者を含め)の数学者の仕事が多数ある。弾性体で小さな穴がある場合では Mazya -Nazarov -Plamenevsky, Ammari-Kang-Lim-Zribi らの仕事があり部分的な固有値の摂動公式が得られている。これを小さな穴でなく細いトンネルや欠陥(Crack),あるいは境界が部分的に不純である場合はあまり研究がない。

2. 研究の目的

上記の背景のもとで物質科学や連続体力学にモデル方程式として現れる楕円型方程式系の解の構造やスペクトルの特性を領域の形状への依存性の観点から研究する。これらの偏微分方程式である種の特異極限においてスペクトルの性質がどうなるかを個別的な詳細を研究する。それらに関して以下の課題を研究する。

- (1) ラメ方程式系については、3次元領域が(1)- 全体あるいは一部が極端に細い部分をもつ場合、または、それらの複合体の場合、と (1)- 内部に細いトンネルや欠陥をもつ場合、について解の構造やスペクトル構造を研究する。
- (2) ストークス方程式系についても (1) の2つに対応する同様の課題 (2)- , (2)- 。
- (3) 1次元集合に漸近する(幅 ϵ の) n 次元の細い領域において一部 () を除いてノイマン境界条件をもつポアソン方程式の解の漸近挙動を考える。但し () においてディリクレ境界条件を課されている。また微小パラメータ ϵ とともに δ はさらに微小とする。この両者の関連性をを用いてポアソン方程式の解の漸近挙動を解析する。

3. 研究の方法

偏微分方程式の研究においては様々な解析の基礎理論が適用される。関数解析、複素関数論、測度論等やそれらに基づく代表的な関数空間であるソボレフ空間や超関数の空間の手法を駆使する。しかし偏微分方程式の境界値問題等では固定領域および一定境界条件を課して議論されることが通常であるが、代表的な応用的偏微分方程式には個別の手法が既存にある。そのため、それぞれの方法に強い研究みに協力を求める。このようにして個別の強みをもつ以下の

本多(北大): ラメの方程式の多項式解の代数構造

牛越(横国大): ストークス方程式の解の解析的性質

伊東(電通大): ラメの方程式の特殊解の構成と性質

の研究者と協力して課題に取り組む。さらに本研究課題は領域形状や境界条件に関する依存性を研究のするため、私が長年やってきた特異摂動の手法と変分法の手法を組み合わせ解やスペクトルの解析に取り組む。

4. 研究成果

上述の研究目的に向けた課題および関連するテーマに取り組んだ。

(1)- . 方向別に極端にゆがんだ断面をもつ細い3次元弾性体の低周波固有振動数の精密な性質を研究してある種の漸近公式を導出し証明した。極限方程式として極限集合である1次元区間における4階常微分方程式を導出した(Jimbo, Ushikoshi, Yoshihara)。これは従前に別のケースで得られた研究(Jimbo, Rodoriguesz-Mulet)の方法を応用して得られたものである。

(1)- . 穴のある2次元有界領域におけるラメの作用素の固有値摂動公式を得た。これはAnmari, Kang, Zbiri の仕事と類似であるが、手法は近似解を具体的に構成する素朴な方法に依っている(Swanson trick)。それゆえにより一般的な状況にも汎用可能性がある。実際に3次元有界領域に細いトンネル状の穴がある領域について同じ課題に取り組むことができ類似の固有値の摂動公式を得た(牛越, 伊東と共同)。

(2)- . 項目(1)の2番目の課題に相当する、小さな穴のある領域におけるストークス作用素の固有値摂動問題に取り組む同様の摂動公式を得ることができた。(1)と同様の方法がほとんどすべての過程で適用できて研究を進めることが出来た。特に3次元の場合の細いトンネル状の穴のあるケースにおいては圧力場の関数がどのように振る舞うのかという新しい課題を得ることができた(牛越, 伊東と共同)。流体中に細い棒を挿入したときに起こる現象との関連で興味深いと思われる。

(3). 1次元集合に漸近する(幅) n 次元の細い領域において一部の微小な集合()を除いてノイマン境界条件をもつポアソン方程式の解の漸近挙動を考える。但し()は端境界に含まれそこにおいてディリクレ境界条件を課されている。また微小パラメータ ϵ とともに ϵ はさらに微小とする。この時にポアソン方程式の解の漸近挙動およびラプラシアン固有値の漸近挙動を求めた。極限集合である1次元線分上には単純な2階微分の常微分作用素が発生するが、

()の極限である端点では場合によって異なる境界条件が発生する。いくつかの場合分けは特徴量の $\epsilon^{(n-2)}/\epsilon^{(n-1)}$ の極限值でパラメトライズされる。 $\epsilon > 0$ の場合はノイマン条件、正の有限値ではロバン条件、 $\epsilon \rightarrow 0$ の場合はディリクレ条件が極限方程式に付随して課される。この場合分けの特徴付け定理を協力者 Jean Carlos Nakasato (サンパウロ大学) とともに得た。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計7件（うち査読付論文 7件/うち国際共著 2件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Satoru Iwasaki, Shuichi Jimbo, Yoshihisa Morita	4. 巻 82
2. 論文標題 Standing waves of reaction-diffusion equations on an unbounded graph with two vertices, SIAM J. Appl. Math.	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 SIAM Journal of Applied Mathematics.	6. 最初と最後の頁 1733-1763
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1137/21M1454572	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 S. Jimbo, E. Ushikoshi, H. Yoshihara	4. 巻 62
2. 論文標題 Asymptotic behavior of the eigenfrequencies of a thin elastic rod with non-uniform cross-section of extremely oblate shape	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Calc. Var. PDE	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00526-022-02325-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Shuichi JIMBO, Yoshihisa MORITA	4. 巻 41
2. 論文標題 Asymptotic behavior of entire solutions to reaction-diffusion equations in an infinite star graph	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Discrete and Continuous Dynamical Systems	6. 最初と最後の頁 4013-4039
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3934/dcds.20211026	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Shuichi JIMBO, Yoshihisa MORITA	4. 巻 41
2. 論文標題 Asymptotic behavior of entire solutions to reaction-diffusion equations in an infinite star graph	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Discrete and Continuous Dynamical Systems	6. 最初と最後の頁 4013-4039
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3934/dcds.20211026	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Shuichi JIMBO, Albert RODRIGEZ MULET	4. 巻 72
2. 論文標題 Asymptotic behavior of eigenfrequencies of a thin elastic rod with non-uniform cross-section	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Society of Japan	6. 最初と最後の頁 119-154
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2969/jms/811198119	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Shuichi JIMBO, Yoshihisa MORITA	4. 巻 267
2. 論文標題 Entire solutions to reaction-diffusion equations in multiple half-lines with a junction	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Differential Equations	6. 最初と最後の頁 1247-1276
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jde.2019.02.008	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Shuichi JIMBO, Albert Rodriguez Mulet	4. 巻 72
2. 論文標題 Asymptotic behavior of eigenfrequencies of a thin elastic rod with non-uniform cross-section	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Society of Japan	6. 最初と最後の頁 119-154
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2969/jmsj/811198119	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計8件（うち招待講演 8件 / うち国際学会 4件）

1. 発表者名 神保秀一
2. 発表標題 特異的領域変形と楕円型作用素の固有値の挙動
3. 学会等名 第8回偏微分方程式レクチャーシリーズ, 福岡工業大学 (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 神保秀一
2. 発表標題 メトリックグラフ上の Heat Kernel II
3. 学会等名 非線形現象の数値シミュレーションと解析ミニ研究会, (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Shuichi JIMBO
2. 発表標題 A semilinear parabolic equation in a simple unbounded metric graph
3. 学会等名 North Eastern Symposium for Mathematical Analysis (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Shuichi JIMBO
2. 発表標題 Semilinear parabolic equations in a simple unbounded graph
3. 学会等名 第17回非線型の諸問題 (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Shuichi JIMBO
2. 発表標題 Singular deformation of domains and several spectral problems (online series lecture)
3. 学会等名 Mini-courses in Mathematical Analysis (Padova University) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Shuichi JIMBO
2. 発表標題 Y-shaped graph and time entire solutions of the Allen-Cahn equation
3. 学会等名 Workshop on New Trends in Variational Models, Fields Institute, Toronto Univ. (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Shuichi JIMBO
2. 発表標題 Spectral properties of thin elastic rod - modes of bending, torsion and stretching,
3. 学会等名 PDE on thin domains and related topics, Tokyo Metropolitan Univ. (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 神保秀一
2. 発表標題 Time entire solution of the Allen-Cahn equation in the star graph
3. 学会等名 日本数学会、企画特別講演 (招待講演)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計2件

1. 著者名 神保秀一、久保英夫	4. 発行年 2020年
2. 出版社 数理工学社	5. 総ページ数 176
3. 書名 多変数の微積分とベクトル解析	

1. 著者名 本多尚文, 神保秀一, 梅田陽子	4. 発行年 2024年
2. 出版社 数理工学社	5. 総ページ数 154
3. 書名 複素関数論の基礎	

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究 分担者	本多 尚文 (Honda Naofumi) (00238817)	北海道大学・理学研究院・教授 (10101)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------