

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 5 年 5 月 10 日現在

機関番号：12201

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2019～2022

課題番号：19K03578

研究課題名（和文）追跡可能測度による力学系の特徴付けに関する研究

研究課題名（英文）The characterizations of dynamical systems using shadowable measures

研究代表者

酒井 一博（Sakai, Kazuhiro）

宇都宮大学・共同教育学部・教授

研究者番号：30205702

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 1,300,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では測度論の視点から擬軌道尾行性の概念を一般化し、研究対象とする力学系を非一様双曲系に拡張することで尾行性理論の新展開を目指したが、完成には至っていない。具体的には、擬軌道の集合に尾行可能測度の概念を導入し、測度論的手法により微分同相写像の尾行可能な擬軌道の振舞を解析することで微分幾何学的力学系理論の立場から尾行可能測度を持つ力学系の特徴付けを目指した。

本研究の推進過程において、次の特筆すべき成果を得た。一般に尾行性を持たない力学系に対する擬軌道の尾行可能測度による量的評価及び、ルベグ測度が尾行可能測度であるような力学系の、 C^{-1} 微分同相写像の範疇での開集合の存在証明である。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究では測度論の視点から擬軌道尾行性の概念を一般化し、研究対象とする力学系を非一様双曲系に拡張することで尾行性理論の新展開を目指した。その完成には至らなかったが、擬軌道集合の尾行可能測度による量的評価や、多様体上のルベグ測度が尾行可能測度となる力学系の開集合の存在など、単に力学系の特徴付け研究にとどまることなく、研究の推進過程で発見された新たな解析手法や知見など、力学系理論全体における研究の進展に貢献することができた。

また、尾行可能測度の概念は非一様双曲系に適用可能であり、カオス研究とも深い関係がある。本研究で得られた新たな知見はカオス理論研究の応用面においても大きな寄与が期待できる。

研究成果の概要（英文）：We aimed for the new development of the shadowing theory of dynamical systems by generalizing the notion of shadowing property from the viewpoint of measure theory and extending our dynamical systems to non-uniformly hyperbolic systems, but not completed yet. In this project, we introduced the notion of shadowable measures for the set of pseudo-orbits, and try to characterize the diffeomorphisms admitting the shadowable measures by analyzing the behavior of shadowable pseudo-orbits from measure-theoretical viewpoint.

We have two remarkable results by making use of the shadowable measures. One is for a system which does not satisfy the shadowing property in general, we obtained the quantitative estimation for the set of pseudo-orbits of the system by the shadowable measure. The other is in the context of C diffeomorphisms, we proved that there is a C open set of diffeomorphisms such that for any element of the set, the Lebesgue measure itself is shadowable for the element.

研究分野：力学系理論

キーワード：擬軌道尾行性 尾行可能測度 確率測度 一様双曲型 非一様双曲型 占有的分解 エルゴード的測度

1. 研究開始当初の背景

擬軌道尾行性 (shadowing property, 以下 SP とする) の概念は, Anosov-Bowen により双曲型力学系の研究に導入されて以来, 力学系の微分幾何学的研究やエルゴード理論的研究において本質的な役割を果たしてきた。数値計算による力学系の軌道は, すべて擬軌道である。SP は, 数値計算による軌道が真の軌道であることを保証する概念であり, 力学系の数値計算的研究においても本質的である。一方, SP は構造安定性予想の解決にも応用されるなど, 近年の微分幾何学的力学系理論における定性論的研究の発展に大きく寄与してきた。本研究では測度論との融合により SP の概念を一般化し, 研究対象とする力学系の範囲を拡張することで SP 理論の新展開を目指した。

拡大的位相同相写像 (expansive homeomorphism) の概念が導入されて以来, 拡大性は位相力学系理論の発展に大きく寄与してきた。この性質は多くの力学系に現われ, 近年, 力学系のエルゴード理論やカオス研究において重要な概念の一つになっている。最近 Morales-Sirvent [5] により, 拡大性の概念の一般化として測度拡大性 (measure-expansivity) の概念が導入され, 測度論的な視点から拡大的位相力学系の研究が開始された。例えば, 「単位円周 S^1 上には拡大的位相同相写像が存在しない」というよく知られた結果に, 測度論的視点から明快な別証明を与えており, その概念の有効性が示されている。また, [7, 13] では部分双曲型分解をもつ系 (非一様双曲系) において測度拡大性が考察されており, 測度論的視点を力学系の研究に導入することで研究対象を拡張することが可能となっていた。

力学系の数値計算的研究をより一層発展させるためには, SP 理論の研究対象を非一様双曲系にまで拡張する必要がある。そのためには SP の概念の拡張が不可欠である。報告者は SP を持つ微分同相写像の C^1 -位相に関する内点の特徴付けを通し, 力学系の分類を行ってきた [9]。また, JSPS 科研費「25400105」, 「JP16K05167」の支援を受け, 測度論的視点から微分可能多様体 M 上の拡大的力学系を微分幾何学的力学系理論の立場から特徴付けを行っている [12]。具体的には, f を M 上の微分同相写像とし, μ を M 上の確率測度とする (f -不変とは限らない)。 f が μ -拡大的 (μ -expansive) であるとは, ある $\delta > 0$ が存在し, すべての $x \in M$ に対し $\mu(\{y \in M : d(f^n(x), f^n(y)) < \delta\}) = 0$ が成立することをいう。ここで, $d(x, y) = \inf_{z \in M} d(f^n(x), f^n(z))$ ($n \in \mathbb{Z}$) である。報告者は $\mathcal{IE} = \{f \in \text{Diff}(M) : \mu\text{-拡大的}(\mu \in \mathcal{M}_f(M))\}$ をその主な考察対象とし, \mathcal{IE} に属する微分同相写像の C^1 -位相に関する内点を Axiom A 系として特徴付けしている ($\mathcal{M}_f(M)$ は M 上の f -不変確率測度全体を表す)。本研究は研究姿勢においてその精神と同じ延長上にあり, 本研究の推進にあたっては上記研究で培われたノウハウを十分に活かすことが可能であった。

SP については [4] において測度論的視点から理論の新展開を目指した研究が開始されているが, 擬軌道の全軌道ではなくの擬軌道の最初の点のみが測度の対象であるなど, 擬軌道の振舞いを反映している測度とは言い難く課題が多い。測度論的な視点から擬軌道の振舞いを適切に反映した尾行可能測度の概念を導入することで [4] における課題を修正し, 報告者の知見に基づいた SP 理論の測度論的研究を可及的速やかに推進する必要があった。

2. 研究の目的

力学系を数値計算的手法により研究する場合, コンピュータにより計算された力学系の軌道には (一般に) 四捨五入等による誤差が含まれている。このような軌道を擬軌道 (pseudo-orbit) と呼ぶ。もし, 力学系が SP をもてば, すべての擬軌道はその力学系の真の軌道であることが保証され, コンピュータにより計算された力学系の軌道はその定性的性質を反映していると言える。一方で SP は力学系の安定性に関する概念であるが, マルコフ分割の存在にも深く関係し, 力学系のエルゴード理論的研究においても本質的な役割を担っている。

一般に C^0 -微分可能多様体 M 上すべての力学系 (微分同相写像) が SP をもつとは限らないが, SP をもつ微分同相写像の全体は, 微分同相写像全体の空間の中で C^0 -位相に関し稠密になることが知られている。報告者は SP を持つ微分同相写像の C^1 -位相に関する内点の特徴付けを通し, 力学系の分類を行ってきた (SP と双曲性 (hyperbolicity) についての長年の研究成果を, Pilyugin 氏との共著により Springer LNM として出版している [8])。

前述のように SP 理論をより一層発展させるためには, 研究対象を非一様双曲型力学系に拡張する必要がある。SP と非一様双曲型分解との関連については, 例えば [1, 2, 3] で研究されているが, 現時点で顕著な進展はみられていない。研究対象を拡張するための 1 つの手段が, 測度論の導入である。本研究では尾行可能測度 (shadowable measure) の概念をコンパクト距離空間上の位相同相写像の擬軌道全体の空間に導入し, 尾行可能測度をもつ M 上の微分同相写像を, 測度論的手法を応用することにより微分幾何学的力学系理論の立場で特徴付け, SP 理論の新たな展開を目指した。

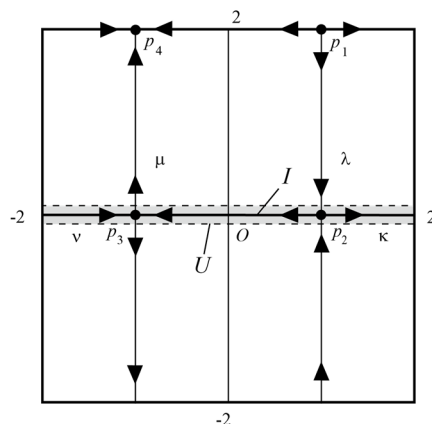
3. 研究の方法

コンパクト距離空間 (X, d) において X の長さ n の点列全体を $X^n = X \times \dots \times X$ (n 個の直積)で表し, f は X 上の位相同相写像とする。与えられた $\epsilon > 0$ に対し, $\{x_i\} \in X^n$ が f の ϵ -擬軌道(以下 ϵ - p - o)であるとは, $d(f(x_i), x_{i+1}) < \epsilon$ ($i=0, \dots, n-2$)が成り立つことをいう。任意の $\epsilon > 0$ に対し, $\{x_i\} \in X^n$ が ϵ -尾行されるとは,ある $y \in X$ が存在して, $d(f^i(y), x_i) < \epsilon$ ($i=0, \dots, n-1$)が成り立つことをいう。

まず, X 上のボレル確率測度 μ (f -不変とは限らない非原子測度)について μ の n 個の直積測度 $\mu_n = \mu \times \dots \times \mu$ ($n \geq 2$)を考える。任意の $\epsilon > 0$ に対し, f の ϵ - p - o $\{x_i\} \in X^n$ 全体の空間を $PO(\epsilon, n)$ で表す。次に,任意の $\epsilon > 0$ に対し, ϵ -尾行される ϵ - p - o 全体を $SPO(\epsilon, n)$ ($PO(\epsilon, n)$)とする。本研究では μ が尾行可能測度であることを次のように定義する:

定義: 任意の $\epsilon > 0$ に対し,ある $\delta > 0$ が存在し,どんな $n \in \mathbb{N}$ に対しても, $\mu_n(SPO(\delta, n)) = \mu_n(PO(\epsilon, n))$ が成立する(またこのとき, f は μ -尾行可能であるということにする)。

定義より $f: X \rightarrow X$ がSPをもてば,任意の μ に対し f は μ -尾行可能である。測度 μ の台(support)を $\text{supp}(\mu)$ で表すと, X はコンパクトであるので, f が μ -尾行可能であれば $f: \text{supp}(\mu) \rightarrow \text{supp}(\mu)$ はSPをもつ。 μ を単位閉区間 I 上のルベグ測度とする。 I 上の恒等写像 id_I はSPをもたないが,そこでの証明を改良することにより id_I は μ -尾行可能でないことが証明できる。下の軌道図の力学系 g は,2次元トーラス T^2 上のAxiom A(+ノースイクル)系で(\mathbb{R}^2 の正方形において上下・左右をそれぞれ同一視),SPをもたないが尾行可能測度が存在する例で,本研究を推進する上でのプロトタイプである。点 p, q はそれぞれ g の双曲型不動点で, $W^s(p) \setminus \{p\} = W^u(q) \setminus \{q\}$ である。Axiom A系がSPをもつための必要十分条件は「安定多様体と不安定多様体が横断的に交差すること」であるので, g はSPをもたない。しかし, g には尾行可能測度が存在することがわかる。



次に C^1 -多様体 M 上の微分同相写像の空間を $\text{Diff}(M)$ で表し C^1 -位相を導入する。また, M 上の確率測度全体を $\mathcal{M}(M)$ とし, $f \in \text{Diff}(M)$ に対し f -不変確率測度全体を $\mathcal{M}_f(M)$ で表す。さらにエルゴード的 f -不変確率測度全体を $\mathcal{M}_f^\circ(M)$ ($\mathcal{M}_f(M)$)で表す。本研究では,

- (a) $\mathcal{P}_S = \{f \in \text{Diff}(M) : \mu\text{-尾行可能} (\mu \in \mathcal{M}(M))\}$,
- (b) $\mathcal{I}_S = \{f \in \text{Diff}(M) : \mu\text{-尾行可能} (\mu \in \mathcal{M}_f(M))\}$
- (c) $\mathcal{E}_S = \{f \in \text{Diff}(M) : \mu\text{-尾行可能} (\mu \in \mathcal{M}_f^\circ(M))\}$

を考察対象とし,これらの集合の C^1 -位相に関する内点を一様双曲性や非一様双曲性の概念を用いて特徴付けすることを到達目標とした。擬軌道の振舞を反映する尾行可能測度が $\mathcal{M}(M)$ に属するか, $\mathcal{M}_f(M)$ に属するか,または $\mathcal{M}_f^\circ(M)$ に属するかなどにより,考察対象となる写像の範囲が拡大される。本研究では,単に対象とする確率測度に連動する写像の特徴付けについての研究を推進するのみではなく,微分幾何学的力学系理論と測度論の融合を図ることで,特徴付けの過程において発見される新たな概念・新たな研究手法の創出も目指した。従来の尾行性理論では捕らえられなかった尾行性に関わる力学系の構造,特に非一様双曲性に関連する性質を,測度論を応用することにより見出し特徴付けることが本研究の独自性である。

報告者はSPを持つ微分同相写像の C^1 -位相に関する内点の特徴付けを通し,力学系の分類を行ってきた。加えて報告者はJSPSの支援により測度拡大性を満たす力学系の特徴付けを遂行してきた。本研究ではこれら報告者による研究実績を礎とし,そこで培われたノウハウを十分に活かすことで尾行可能測度をもつ微分同相写像というSPをもつ力学系よりも広い空間に対し,幅広い視野で考察・解析する手法を創造し特徴付けを推進する。具体的には:

・ \mathcal{P}_S の C^1 -位相における内点を,一様双曲系(Axiom A+強横断性条件)として特徴付ける(これについては,事前の準備的作業で完了している [6])

・IS の C^1 -位相における内点を，一様双曲系 (Axiom A+ ノーサイクル) として特徴付ける (これについても，事前の準備的作業で完了している [6])。そして

・ES の C^1 -位相における内点を，部分双曲型分解 (partially hyperbolic splitting) あるいは占有的分解 (dominated splitting) をもつ力学系として特徴付ける。さらに可能であれば [1,2,3,7,13] との関連を詳細に検討し，更なる展開を目指す。

4. 研究成果

本研究の基盤となる研究成果は [6] 掲載された。これにより PS, IS の C^1 -位相における力学的特徴付けは完了している。従って，「ES の内点に属する微分同写像の特徴付け」と「非一様双曲型力学系への応用」が本研究の主たる研究目的であった。ES の特徴付けについては， S^1 上のダンジョワ写像を周期点の近傍に (局所的に) 埋め込むことが必要であるが，現時点においても有効な進捗は得られず，下記の成果を考慮し，達成率は 60% である。

本研究計画期間では有効な進捗を得ることはできなかったが，研究の推進過程において尾行可能測度に関する 2 つの特筆すべき結果を得ることができた。

1 つは，尾行可能な擬軌道の尾行可能測度による量的評価で，その結果は [10] に掲載された。非一様双曲型力学系のように一般に尾行性を持たない力学系に対し，尾行可能な擬軌道についての定量的結果が得られたのは研究代表者が知る限り世界で最初である。この研究成果により，SP 理論の非一様双曲型力学系への新たな展開に向け一つの示唆を得ることができた。

もう 1 つは，本研究の基盤となった上記論文で構成したトラス上の力学系の一般化であり，その結果は [11] に掲載された。Filtration の概念を利用することにより，「尾行性は持たないが， M 上のルベグ測度 m が尾行可能測度となる，力学系の開集合の存在」を， C^1 -微分同相写像の範疇で示すことができた。力学的性質をルベグ測度 m で量的評価するためには，一般に C^2 の仮定が必要であるが， C^1 -微分同相写像の範疇で示すことができた点がこの研究成果の注目すべき点である。

SP 理論を非一様双曲型力学系の範疇で展開するためには，エルゴード的尾行可能測度の特徴付けが必要不可欠である。機会があれば今後においても科学研究費補助金を獲得し，本研究の継続的推進に挑戦したい。

<引用文献>

- [1] F. Abdenur and L. J. Díaz, Pseudo-orbit shadowing in the C^1 topology, *Discrete Contin. Dyn. Syst.* 17 (2007), 223-245.
- [2] C. Bonatti, L. J. Díaz and G. Turcat, Pas de "shadowing lemma" pour des dynamiques partiellement hyperboliques, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 330 (2000), 587-592.
- [3] S. Kryzhevich and S. Tikhomirov, Partial hyperbolicity and central shadowing, *Discrete Contin. Dyn. Syst.* 33 (2013), 2901-2909.
- [4] K. Lee and C. A. Morales, Topological stability and pseudo-orbit tracing property for expansive measures, *J. Differential Equations* 262 (2017), 3467-3487.
- [5] C. A. Morales and V. F. Sirvent, Expansive measures, *IMPA Mathematical Publications* 29, Colóquio Brasileiro de Matemática, Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2013.
- [6] K. Moriyasu, K. Sakai and N. Sumi, Diffeomorphisms with shadowable measures, *Axioms* 2018, 7, 93; <https://doi.org/10.3390/axioms7040093>
- [7] M. J. Pacifico and J. L. Vieitez, On measure expansive diffeomorphisms, *Proc. Amer. Math. Soc.* 143 (2015), 811-819.
- [8] S. Yu. Pilyugin and K. Sakai, Shadowing and Hyperbolicity, *Lecture Notes in Math.* 2193 (2017), Springer.
- [9] K. Sakai, Pseudo orbit tracing property and strong transversality of diffeomorphisms on closed manifolds, *Osaka J. Math.* 31 (1994), 373-386.
- [10] K. Sakai and N. Sumi, The measures of shadowable pseudo-orbits, *Dyn. Syst.* 35 (2020), 369-381
- [11] K. Sakai and N. Sumi, Filtrated pseudo-orbit shadowing property and approximately shadowable measures, *Axioms* 2021, 10, 38; <https://doi.org/10.3390/axioms10010038>
- [12] K. Sakai, N. Sumi and K. Yamamoto, Measure-expansive diffeomorphisms, *J. Math. Anal. Appl.* 414 (2014), 546-552.
- [13] K. Sakai, N. Sumi and K. Yamamoto, Ergodic measure-expansive diffeomorphisms, *Dyn. Syst.* 29 (2014), 569-577.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 4件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

| | |
|--|-----------------------|
| 1. 著者名 Kazuhiro Sakai | 4. 巻 58 |
| 2. 論文標題 Positively expansive maps and the limit shadowing properties | 5. 発行年 2021年 |
| 3. 雑誌名 J. Korean Math. Soc. | 6. 最初と最後の頁 207-218 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4134/JKMS.j200019 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |
| 1. 著者名 Sakai Kazuhiro, Sumi Naoya | 4. 巻 10 |
| 2. 論文標題 Filtrated Pseudo-Orbit Shadowing Property and Approximately Shadowable Measures | 5. 発行年 2021年 |
| 3. 雑誌名 Axioms | 6. 最初と最後の頁 38 ~ 38 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3390/axioms10010038 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |
| 1. 著者名 K. Sakai and N. Sumi | 4. 巻 - |
| 2. 論文標題 The measures of shadowable pseudo-orbits | 5. 発行年 2019年 |
| 3. 雑誌名 Dynamical Systems: An International Journal | 6. 最初と最後の頁 - |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1080/14689367.2019.1703907 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |
| 1. 著者名 K. Moriyasu, K. Sakai and N. Sumi | 4. 巻 - |
| 2. 論文標題 Shadowing Property and Invariant Measures Having Full Supports | 5. 発行年 2020年 |
| 3. 雑誌名 Qualitative Theory of Dynamical Systems | 6. 最初と最後の頁 - |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s12346-020-00338-9 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

〔学会発表〕 計0件

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

| | 氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号) | 所属研究機関・部局・職 (機関番号) | 備考 |
|--|---------------------------|-----------------------|----|
|--|---------------------------|-----------------------|----|

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

| 共同研究相手国 | 相手方研究機関 |
|---------|---------|
|---------|---------|