

令和 5 年 5 月 29 日現在

機関番号：12601

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2019～2022

課題番号：19K03584

研究課題名(和文)地球流体方程式に現れる異方性と特異極限問題の数学解析

研究課題名(英文) Mathematical analysis of anisotropy and singular limit problems in the equations of geophysical fluid dynamics

研究代表者

高田 了 (Takada, Ryo)

東京大学・大学院数理科学研究科・准教授

研究者番号：50713236

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：地球流体力学および磁気流体力学に現れる非線形偏微分方程式系に対する数学解析を行った。回転の影響による Coriolis 力付き非圧縮性 Navier-Stokes 方程式および磁気流体力学方程式の初期値問題を考察し、スケール臨界な Sobolev 正則性をもつ初期値に対して、回転速度が十分大きい場合における同方程式の時間大域的適切性を証明した。また Coriolis 力付き非圧縮性 Navier-Stokes 方程式の時間大域解に関する長時間挙動を考察し、回転による分散性の効果を含む時間減衰評価、および時間無限大における解の漸近形を導出した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

流体力学に現れる非線形偏微分方程式系の数学解析において、初期値問題に対する時間大域解の存在と一意性、および解の長時間挙動の解析は基礎的かつ重要な研究課題である。本研究では、回転の影響による Coriolis 力付き非圧縮性 Navier-Stokes 方程式および磁気流体方程式を対象として上記の問題に取り組み研究成果を得た。特に、回転の影響による流れの長時間挙動の変化を、時間減衰評価および漸近形の観点から特徴付けることに成功した。

研究成果の概要(英文)：The aim of this research is the mathematical analysis for nonlinear partial differential equations arising in geophysical fluid dynamics and magnetohydrodynamics. We consider the initial value problems for the incompressible Navier-Stokes equations and the magnetohydrodynamics equations with the Coriolis force, and show the global well-posedness for the initial data in the scaling critical Sobolev spaces provided that the rotating speed is sufficiently high. Also, we investigate the large time behavior of global solutions to the rotating Navier-Stokes equations, and derive the temporal decay estimates and the asymptotics of solutions as time approaches infinity.

研究分野：偏微分方程式

キーワード：偏微分方程式 Navier-Stokes方程式 磁気流体力学方程式 Coriolis力 時間大域的適切性 特異極限問題 長時間挙動

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

3次元全空間において、流体の回転による Coriolis 力の影響を考慮した非圧縮性 Navier-Stokes 方程式の初期値問題を考察する。この Coriolis 力は歪対称線形作用素として分散性を有することが知られている。また初期値を2次元速度場と3次元速度場の和の形として与えた際、回転速度を無限大とする特異極限において同方程式の解は、2次元速度場を初期値とする2次元非圧縮性 Navier-Stokes 方程式の解に収束することが証明されている。本研究ではこのような回転が有する分散性と異方性に着目し、地球流体力学に現れる非線形偏微分方程式に対して、初期値問題の適切性、解の長時間挙動、および特異極限問題の観点から数学解析を行う。

2. 研究の目的

本研究の目的は、地球流体力学に現れる基礎方程式を対象とし、回転や安定な温度成層が流れの様相に及ぼす影響を、非線形偏微分方程式の観点から数学的に解析することである。この問題は、Coriolis 力および Boussinesq 近似と安定な温度成層の効果を取り入れた非圧縮性 Navier-Stokes 方程式の初期値問題や特異極限問題として数学的に定式化される。本研究では、Coriolis 力付き非圧縮性 Navier-Stokes 方程式および関連する非線形偏微分方程式系を対象とし、その初期値問題の時間大域的適切性の証明、時間大域解の時間減衰評価と時間無限大における漸近形の導出、および特異極限問題における解の収束の正当化を研究目標とする。

3. 研究の方法

3次元層状領域における Coriolis 力付き Navier-Stokes 方程式の解析では、異方的な可積分性をもつ Lebesgue 空間を用いて、その空間における線形評価および双線形評価を確立することで、スケール臨界な Sobolev 空間における時間大域的適切性を証明する。また高速回転極限に関しては、極限方程式の解からの摂動に対するエネルギー評価を確立することで解の収束を証明する。

Coriolis 力付き磁気流体力学方程式の解析では、磁場による外力項の影響を考慮した修正線形解を導入する。その修正線形解に対する時空間積分評価を確立することで、スケール臨界な Sobolev 空間における時間大域的適切性を証明する。

Coriolis 力付き Navier-Stokes 方程式の長時間挙動の解析では、時間大域解に対するエネルギー減衰評価および時空間積分評価を用いることで、解の時間減衰評価を示し、また時間無限大における解の漸近形を導出する。

海外研究者との研究打ち合わせの訪問・招聘を行う。また国内外で開催される国際研究集会へ参加し、討論や意見交換、および最先端の研究成果やその解析手法に関する情報収集を行う。

4. 研究成果

(1) 3次元層状領域における回転 Navier-Stokes 方程式の時間大域的可解性と特異極限問題

水平方向は全平面かつ鉛直方向に周期性を課した3次元層状領域において、回転による Coriolis 力の影響を考慮した非圧縮性 Navier-Stokes 方程式を対象とし、その初期値問題の適切性と、回転速度を無限大とする特異極限問題に関して研究を行った。初期値問題に関しては、水平方向への有界性と鉛直方向への2乗可積分性を課した異方的 Lebesgue 空間を用いて、その空間における線形評価および双線形評価を確立することで、スケール臨界な Sobolev 正則性をもつ初期速度場に対して、回転速度を十分大きく取った場合の時間大域解の一意存在を証明した。また回転速度を無限大とする特異極限問題に関して、全空間における先行研究では、同方程式の解である3次元速度ベクトル場が2次元 Navier-Stokes 方程式の時間大域解へ収束することが、任意の有限な時間区間での時空間積分ノルムを用いて示されている。本研究では、時間大域的適切性を証明する際に用いた解の分解とエネルギー評価、線形解に対する時空間積分評価、および3次元層状領域における Poincaré 型不等式と補間理論を用いることで、時間無限区間での時空間積分ノルムにおいて、同方程式の解が2次元 Navier-Stokes 方程式の時間大域解へ収束することを証明した。本研究成果は大山広樹氏(九州大学)との共同研究に基づくものである。

(2) Coriolis 力付き磁気流体力学方程式の時間大域的可解性

3次元全空間において、回転による Coriolis 力の影響を考慮した非圧縮性磁気流体力学方程式を対象とし、その初期値問題の適切性に関して研究を行った。同方程式に対する先

行研究では、スケール劣臨界な Sobolev 正則性をもつ初期速度場および初期磁場に対して、回転速度を十分大きく取った場合の時間大域的一意可解性が知られている。本研究では、スケール臨界空間における初期値問題の適切性を考察した。まず線形評価として、Coriolis 力の影響による振動項が加わった Stokes 半群に対して、スケール臨界な時空間積分ノルムにおける非斉次型評価を確立した。次に速度場に関して、大きな初期磁場から生成される外力項を加えた修正線形解を導入し、上記の非斉次時空間積分評価を適用することで、回転速度を無限大とした際に、スケール臨界な時空間積分ノルムにおいて修正線形解がゼロに収束することを証明した。この修正線形解からの摂動に対する時間大域的エネルギー評価を確立し、修正線形解に対する時空間積分評価を用いることで、スケール臨界な Sobolev 正則性をもつ初期速度場および初期磁場に対して、回転速度を十分大きく取った場合の同方程式に対する時間大域解の一意存在を証明した。本研究成果は、米田慧司氏（沼津工業高等専門学校）との共同研究に基づくものである。

(3) 回転 Navier-Stokes 方程式の時間大域解の長時間挙動

3次元全空間において、回転による Coriolis 力の影響を考慮した非圧縮性 Navier-Stokes 方程式を対象とし、その初期値問題における時間大域解の長時間挙動に関して研究を行った。特に、時間大域解に対する L^p 型時間減衰評価、および時間無限大における漸近形を考察した。Coriolis 力に対応した分散関係式は周波数空間において不連続点をもつため、線形解の積分核は可積分性を有さないことが知られている。本研究では線形解の積分核の可積分性をいわずに、時間大域解に対するエネルギー減衰評価と時空間積分評価に着目した解析を行った。解の時間減衰評価に関しては、まず L^2 エネルギー時間減衰評価を導出し、更に線形解に対する時間減衰評価と非線形解に対する時空間積分評価を用いることで、回転による分散性の効果を含む L^p 型時間減衰評価を確立した。また解の長時間挙動に関して、初期速度場に 1 次多項式の重み付き可積分性を課した際に、時間無限大において解が、線形解の積分核の 1 階導関数に修正項を加えたものに収束することを証明した。本研究成果は江頭貴成氏（九州大学）との共同研究に基づくものである。

(4) 球対称関数に対する重み付き高階 Gagliardo-Nirenberg 型補間不等式

原点からの距離の冪を重み関数とする高階 Gagliardo-Nirenberg 型補間不等式を対象として、その成立条件に関する研究を行った。同不等式に対しては、不等式の成立に関する重み冪の許容指数範囲についての必要十分条件が知られている。この許容指数範囲の改良に関する先行研究として、1 階補間不等式に対して、関数に球対称性を課した際に、不等式の成立に関する重み冪の許容指数範囲がより広い範囲へ拡張されることが証明されている。本研究では高階微分を含む補間不等式を考察し、関数の球対称性による重み冪の許容指数範囲の改良を証明した。本研究成果は、米田慧司氏（沼津工業高等専門学校）との共同研究に基づくものである。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 5件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Ryo Takada and Keiji Yoneda	4. 巻 -
2. 論文標題 Global solutions for the rotating magnetohydrodynamics system in the scaling critical Sobolev space	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Funkcialaj Ekvacioj	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Takanari Egashira and Ryo Takada	4. 巻 25
2. 論文標題 Large Time Behavior of Solutions to the 3D Rotating Navier-Stokes Equations	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Fluid Mechanics	6. 最初と最後の頁 31 pp
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00021-023-00767-x	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Hiroki Ohyama and Ryo Takada	4. 巻 21
2. 論文標題 Asymptotic limit of fast rotation for the incompressible Navier-Stokes equations in a 3D layer	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Evolution Equations	6. 最初と最後の頁 2591-2629
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00028-021-00697-z	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Ryo Takada and Keiji Yoneda	4. 巻 203
2. 論文標題 Higher-order interpolation inequalities with weights for radial functions	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Nonlinear Analysis	6. 最初と最後の頁 12 pp
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.na.2020.112158	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Ryo Takada	4. 巻 164
2. 論文標題 Long time solutions for the 2D inviscid Boussinesq equations with strong stratification	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 manuscripta mathematica	6. 最初と最後の頁 223-250
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00229-019-01174-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

[学会発表] 計16件 (うち招待講演 16件 / うち国際学会 6件)

1. 発表者名 Ryo Takada
2. 発表標題 Global solutions for the incompressible rotating MHD equations in the scaling critical Sobolev space
3. 学会等名 International Workshop on Multi-Phase Flows: Analysis, Modelling and Numerics, Waseda University, Japan (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 高田 了
2. 発表標題 Global solutions for the incompressible rotating MHD equations in the scaling critical Sobolev space
3. 学会等名 解析セミナー, 神戸大学 (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 高田 了
2. 発表標題 Global solutions for the incompressible rotating MHD equations in the scaling critical Sobolev space
3. 学会等名 NLPDEセミナー, 京都大学 (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 高田 了
2. 発表標題 回転成層流体に現れる分散性と異方性の数学解析
3. 学会等名 数理科学講演会，東京大学（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Ryo Takada
2. 発表標題 Global solutions for the incompressible rotating MHD equations in the scaling critical Sobolev space
3. 学会等名 International Workshop on PDEs arising in Fluid Dynamics, KAIST, Republic of Korea (online)（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 高田 了
2. 発表標題 Global solutions for the incompressible rotating MHD equations in the scaling critical Sobolev space
3. 学会等名 第180回神楽坂解析セミナー，東京理科大学（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 高田 了
2. 発表標題 Global solutions for the incompressible rotating MHD system in the scaling critical Sobolev space
3. 学会等名 応用解析研究会，早稲田大学（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Ryo Takada
2. 発表標題 Global solutions for the incompressible rotating MHD system in the scaling critical Sobolev space
3. 学会等名 East Asian Workshop on Partial Differential Equations in Fluid Dynamics, Tokyo Institute of Technology, Japan (online) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 高田 了
2. 発表標題 Fast rotation limit for the incompressible Navier-Stokes equations in a 3D layer
3. 学会等名 東工大数理解析セミナー, 東京工業大学 (online) (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Ryo Takada
2. 発表標題 Fast rotation limit for the incompressible Navier-Stokes equations in a 3D layer
3. 学会等名 Mathematical Analysis of Viscous Incompressible Fluid, RIMS, Kyoto University, Japan (online) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 高田 了
2. 発表標題 Fast rotation limit for the incompressible Navier-Stokes equations in a 3D layer
3. 学会等名 鳥取PDE研究集会2021, 鳥取市民交流センター (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 高田 了
2. 発表標題 Asymptotic limit of fast rotation for the incompressible Navier-Stokes equations in a 3D layer
3. 学会等名 解析学火曜セミナー, 東京大学 (online) (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 高田 了
2. 発表標題 Strongly stratified limit for the 3D inviscid Boussinesq equations
3. 学会等名 At the Start of Third Round - In honor of Professor Yasuhide Fukumoto on his sixtieth birthday -, 九州大学 (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Ryo Takada
2. 発表標題 Strongly stratified limit for the 3D inviscid Boussinesq equations
3. 学会等名 Analysis Seminar, Seoul National University, Republic of Korea (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Ryo Takada
2. 発表標題 Asymptotic limit of strong stratification for the 3D inviscid Boussinesq equations
3. 学会等名 Evolution Equations: Applied and Abstract Perspectives - in honour of Matthias Hieber's 60th birthday -, CIRM, France (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 高田 了
2. 発表標題 Asymptotic limit of strong stratification for the 3D inviscid Boussinesq equations
3. 学会等名 解析セミナー，神戸大学（招待講演）
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------