

令和 5 年 6 月 10 日現在

機関番号：32660

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2019～2022

課題番号：19K03591

研究課題名(和文) 固有値問題からみた非線形楕円型方程式の可解性と解の解析

研究課題名(英文) Solvability and solutions' analysis of nonlinear elliptic equations from the viewpoint of eigenvalue problems

研究代表者

田中 視英子(Tanaka, Mieko)

東京理科大学・理学部第一部数学科・准教授

研究者番号：00459728

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,500,000円

研究成果の概要(和文)：(1) p -Laplace方程式で使われるPicone不等式の一般化を行い、上手いテスト関数を用いる事により、 (p,q) Laplace 方程式に対してもPicone不等式により正値解の非存在を示す研究成果をあげた。(2) 先行研究で (p,q) -Laplacianの固有値問題に関係する二つの曲線が構成されていたが、この二本の曲線が一致しない事を示した。ここでの手法において、パラメータが特別な場合に三つの正値解を見つける事に成功した。(3) p -sublinearな摂動項を持つ p -Laplace 方程式において、閾値を超えた場合にも最小エネルギー解からの分岐と思われる二つの正値解の存在を示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

Picone不等式を一般化して上手いテスト関数を用いる事により適用出来る方程式の範囲を広げる事に成功した事は、色々な形への一般化Picone不等式の導出と適用方法の改良などへの促進となり今後の発展が期待される。正値解の多重存在の証明方法を構築や既存の方法の改良を行った。この手法が他の方程式などにも適用されたり、改良されて使われるようになる事が期待され、意義があると考えられる。

研究成果の概要(英文)：(1) By generalizing the Picone inequality used in the p -Laplace equation and using a good test function, the Picone inequality can be used to prove the non-existence of positive solutions to the (p,q) Laplace equation. (2) Although two curves related to the (p,q) -Laplacian eigenvalue problem were constructed in the previous work, it's proven that the two curves do not coincide by showing the existence of positive solutions that are different from the least energy solution. By this method, we succeeded in finding three positive solutions in a special case. (3) In the p -Laplace eigenvalue equation with a p -sublinear perturbation term, we showed the existence of two positive solutions that seem to be the bifurcation from the least energy solution even when a parameter is over the threshold.

研究分野：楕円型微分方程式、変分的手法

キーワード：非線形固有値問題 楕円型微分作用素 解の存在と非存在 解の符号

1. 研究開始当初の背景

研究代表者は Bobkov 氏との共同研究で、二つのパラメータを持つ (p,q) -Laplacian の非線形固有値問題 (Dirichlet 境界条件) を導入し、第一固有値の解析に対応するような正值解の存在と非存在についてパラメータの分類を行っていた。その後、Mihalescu-Morossanu は Neumann 境界条件, Gynlov-Morossanu は Robin 境界条件での (p,q) -Laplacian の固有値問題について研究が行われた。しかし、この (p,q) -Laplacian の非線形固有値問題は研究が始められたばかりで、高い次数の固有値の解析に対応するような符号が変化するような解についての研究結果は少なかった。また、 (p,q) -Laplacian の非線形固有値問題は色々な非線形項の形で考える事が可能であり、研究代表者が導入したこの形が固有値問題として適当であるか検討する必要性があった。その為、単独の p -Laplacian の非線形固有値における先行研究との関連や比較や検証を行う必要があった。

2. 研究の目的

パラメータをもつ (p,q) -Laplace 方程式, 特に固有値問題に関連した方程式の解の可解性、解の性質や多重性について解析することが主な目的であった。また、解の符号(正值性,符号変化)とパラメータとの関係を解析し、高い次数の固有値の解析へ繋げることを目標としていた。具体的な研究の目的は、研究対象である (p,q) -Laplace 方程式が固有値問題として適当であるか検討するために、単独の p -Laplacian の第一固有値に関連した問題として現れる Fredholm type alternative や反最大値原理に対応する問題を (p,q) -Laplacian に対して考察を行い固有値問題としての検証を行うことであった。とくに、Fredholm type alternative は $p=2$ の Laplacian とそれ以外の場合では結果が異なることが知られている問題である。そこで、 (p,q) -Laplacian でどちらかが Laplacian と一致する場合、すなわち、 $p=2$ または $q=2$ である場合にはどのような事が起きるのか解析することが具体的な目的の一つであった。

2. 研究の方法

(1) Picone 不等式の一般化を行った。Picone 不等式は p -Laplace 方程式の正值解の非存在を示すのに有効であることが知られている。最近では、より一般の非線形項を持つ方程式へ適用できる一般化 Picone 不等式が色々得られている。本研究では (p,q) -Laplacian へ適用する為の一般化 Picone 不等式を作った。

(2) 解の多重存在証明では、極小点の探し方がポイントとなった。方程式に対応する fiber functional のある種のエネルギーセットを変化させるためにパラメータを増やす方法を導入した。この手法は Ilysov—Silva(2018)の結果を参考にして、我々の研究対象である (p,q) -Laplace 方程式に適した形に改良を加え発展させたものである。

(3) パラメータを持つ p -Laplace 方程式からの p -sublinear な項が損動された方程式の可解性や解の正值性については、単独の p -Laplace 方程式の ground state および (p,q) -Laplace 方程式の ground state の解析結果やその研究を行った経験や手法から、より詳細な解析を行うことができた。

4. 研究成果

(1) 一般に、通常の Picone 不等式は p -Laplace 方程式の正值解の非存在を示すのに有効な不等式であることが知られている。本研究では、既存のテスト関数とは異なる上手いテスト関数を使うことにより (p,q) -Laplace 方程式の固有値問題に対応する正值解の非存在を証明することができることに着目した。そこで、この上手いテスト関数を使える形の一般化 Picone 不等式の導出を行い、既存の (p,q) -Laplace 方程式の固有値問題においては未解決であった部分の解析を行うことに成功した。また、この一般化した Picone 不等式の適用範囲を広げることにより、より一般のパラメータ付きの非線形項を持つ (p,q) -Laplace 方程式の正值解の存在と非存在についてのパラメータの分類結果を得ることができた。本研究では、一般化された Picone 不等式を (p,q) -Laplace 方程式にのみ適用したが、単独の p -Laplace 方程式に対しても適用できる非線形項の範囲を広げることが可能であると思われる。

(2) 先行研究では、二つのパラメータを持つ (p,q) -Laplacian の固有値問題に対応する方程式の正值解の存在と非存在を分ける平面内の閾値(曲線)と ground state の存在と非存在を分けるような曲線が一致するかどうかは未解決であった。しかし、最小エネルギー解とは異なり、方

程式に対応する汎関数の極小点となるような正值解を見つけることにより、二つの曲線が一致しないことを示すことに成功した。また、先行研究で発見していた二つのパラメータが平面内の特別な点である場合には、その近傍で複雑な現象が起きており解析が困難であると予想していた。本研究では、この特別な点の近傍で3つの正值解の存在を示すことに成功した。これは研究の方法の(2)で述べたように、変分的な手法で極小な解を見つけるために、汎関数にパラメータを増やし、追加したパラメータによりエネルギーセットを変化させて挙動をみる方法が上手くいった結果により得られた成果である。この方法はパラメータを増やすことで一見複雑になるように思われるが、エネルギーセットの考察に便利な方法となった。このような方法が他にも上手く適用できるように改良できれば、極小解の存在証明に役に立つと思われる。

(3) 単独の p -Laplacian の固有値問題に現れる方程式に p -sublinear な項を摂動したものとして考えたパラメータを持つ p -Laplace 方程式の正值解についてパラメータの分類を行った。一般には、 p -sublinear に符号が変化するような係数関数が掛かっている場合には非負値解の正值性を保証する最大値原理が適用できなくなり、dead core 解と呼ばれるような解が現れることが知られている。本研究では、変分的なエネルギーが低いような特徴を持つ非負値解に対しては領域全体での正值性に変わる特徴づけを行った。最小エネルギーの存在と非存在についてのパラメータとの関係は、主に対応する p -Laplacian の第一固有値を閾値に持つことが知られていたが、ちょうど閾値と一致する場合にどうなっているか知られていなかった。本研究では、この閾値での最小エネルギー解の存在と非存在は、 p -sublinear な項の冪と p との関係、さらに第一固有関数と p -sublinear な係数関数との積分値の符号により完全に分類することに成功した。さらに、この閾値を超えた場合でも最小エネルギー解からの分岐として、変分的には極小解と Mountain pass 解と呼ばれるような特徴を持った二つの正值解が存在する場合があることを示した。摂動項が p -superlinear な場合の既存の結果と一致することが分かった。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 3件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Vladimir Bobkov and Mieko Tanaka	4. 巻 24
2. 論文標題 Multiplicity of positive solutions for (p,q) -Laplace equations with two parameters	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Communications in contemporary mathematica	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1142/S0219199721500085	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Vladimir Bobkov and Mieko Tanaka	4. 巻 2020
2. 論文標題 Generalized Picone inequalities and their applications to (p,q) -Laplace equations	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Open Mathematics	6. 最初と最後の頁 1030-1044
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1515/math-2020-0065	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

1. 著者名 Vladimir Bobkov and Mieko Tanaka	4. 巻 62
2. 論文標題 On subhomogeneous indefinite p -Laplace equations in supercritical spectral interval	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Calculus of Variations and Partial Differential Equations	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00526-022-02322-4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計5件（うち招待講演 3件/うち国際学会 1件）

1. 発表者名 田中 視英子
2. 発表標題 Remarks on ground states for p -Laplace equations with indefinite weight
3. 学会等名 オンラインによる微分方程式セミナー
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 田中 視英子
2. 発表標題 符号変化する重み関数付き p -劣線形項を持つ p -ラプラス方程式の最小エネルギー解について
3. 学会等名 応用解析研究会 (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 田中 視英子
2. 発表標題 The least energy solutions for subhomogeneous indefinite p -Laplace equations
3. 学会等名 Internal Workshop on Nonlinear Elliptic Equations and Its Applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 田中 視英子
2. 発表標題 Some remarks on positive solutions for (p,q) -Laplace equations with two parameters
3. 学会等名 南大阪応用数学セミナー (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 田中 視英子
2. 発表標題 Maximum principle and Anti-Maximum principle type results for the p -Laplacian with indefinite weights
3. 学会等名 大阪公立大学における微分方程式セミナー
4. 発表年 2022年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
チェコ	West Bohemia			