

令和 4 年 6 月 10 日現在

機関番号：12101

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2019～2021

課題番号：19K03597

研究課題名(和文) グラフの全域木と平面上の幾何的全域木

研究課題名(英文) Spanning trees of graphs and geometric spanning trees in the plane

研究代表者

加納 幹雄 (Kano, Mikio)

茨城大学・理工学研究科(工学野)・名誉教授

研究者番号：20099823

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：辺着色された2部グラフGの最小色次数が $|G|/3$ 以上でかつある補助的な条件を満たせば、Gには虹全域木(or 彩色全域木)が存在することを示した。また、辺着色されたグラフHにおいて、もし隣接する2点の色次数の和が $|H|$ 以上で、かつ補助的な条件を満たせば、Hには虹全域木が存在することを示した。この他、グラフの因子について5本の論文を発表した。

平面上の幾何的全域木については、平面上に赤点の集合Rと青点の集合Bと関数 $f: R \rightarrow \{1, 2, 3, \dots\}$ が与えられたとき、R、B上の無交差な幾何的全域木Tで、すべての葉は青点ですべての内点は赤点で、赤点xではある次数条件を満たすものが存在することを示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

グラフの全域木はグラフの基本的な概念の一つであり、これまで多くの研究がされてきたが、ここでは辺着色されたグラフにおける虹全域木と彩色全域木について新しい結果を得た。また、グラフの因子についてもいくつかの新たな結果をえた。これらの成果はグラフ理論の内容を深め、また関連する分野への応用なども期待できる。

平面上の離散幾何で最近注目されている色の付いた点上での幾何がある。ここでは平面上に赤点と青点が与えられたとき、無交差な幾何的全域木で青点が葉となり、赤点は内点(次数2以上の点)となるようなものについて研究した。また、関連する問題を研究した。

研究成果の概要(英文)：One my paper shows that if an edge-colored connected bipartite graph G has the minimum color degree at least  $|G|/3$  and satisfies some additional conditions, then G has a rainbow spanning tree (or a properly colored spanning tree). My other paper shows that if an edge-colored connected graph H has the minimum color-degree sum of two adjacent vertices at least  $|H|$  and satisfies some additional conditions, then H has a rainbow spanning tree. I also published five papers on factors of graphs.

I obtained the following result. Assume that a red point set R and a blue point set B in the plane and a function  $f: R \rightarrow \{1, 2, 3, \dots\}$  are given. If  $2 \leq |B| \leq \sum_{x \in R} (f(x)-2)+2$ , then there exists a non-crossing geometric spanning tree T on R、B such that every leaf is blue, every inner vertex x is red and satisfies  $2 \leq \deg T(x) \leq f(x)$ . We also published two more papers on geometric graphs.

研究分野：離散数学とその応用

キーワード：グラフの全域木 虹全域木 彩色全域木 グラフの因子 幾何的全域木 赤点と青点上の離散幾何

### 1. 研究開始当初の背景

グラフの全域木の研究には長い歴史があり、非常に多くの研究がされている。ここでは次の2つの問題を考える。一つは辺着色された連結グラフにおいて、虹全域木や彩色全域木が存在するための良い十分条件を求めることである。ここで虹全域木とは、全部の辺の色が異なる全域木である。一方、彩色全域木は隣接する辺の色が異なる全域木である。もう一つの問題は一般の連結グラフにおいて、**Stem** に条件を付けた全域木の研究である。これは比較的最近研究が始まった問題で、得られている結果も多くはない。新しい結果を付け加えたい。さらに、全域木はグラフの全域部分グラフで木となるものであり、グラフの全域部分グラフである条件を満たすものはグラフの因子と呼ばれている。よって、全域木はグラフの因子の一つであり、グラフの他の因子とも深い関係がある。そのためグラフの因子についても研究する。

平面上の幾何的全域木については、平面上に与えられた赤点集合と青点集合に対して、青点を葉とし、赤点は内点(次数が2以上の点)とする無交差な幾何的全域木について研究する。平面上の赤点と青点上の幾何的全域木に関しては、赤点上の幾何的全域木と青点上の全域木の対を考えて、これら2つの全域木の交差数が少ないものを求める研究など、関連する研究がいくつかある。さらに、これに関連して、平面上に与えられた赤点と青点の2色点に限らず、多色の点集合に関する離散幾何的な問題についても研究をする。

### 2. 研究の目的

グラフの全域木に関する具体的な研究課題としては次のものがある。全域木  $T$  から  $T$  の葉を除去した部分木を  $T$  の **Stem** (幹) といい、 $\text{Stem}(T)$  で表す。 $\text{Stem}(T)$  がある性質をもつような全域木  $T$  が存在するための条件を求めることである。例えば  $\text{Stem}(T)$  の最大次数が  $k$  以下となる全域木  $T$  が存在するための条件についてはいくつか結果が得られている。この他、**Stem** とは関係のないある性質をもつ全域木、もっと広くグラフの因子についても新しい結果を求めたい。

辺着色されたグラフおよび2部グラフにおいて、虹全域木や彩色全域木が存在するための良い十分条件を求めたい。例えば、辺着色されたグラフにおいて、彩色全域木が存在するための最小色次数の条件を、隣接する2点の色次数和の条件などに拡張したい。

平面上の幾何的全域木については、平面上に赤点の集合  $R$  と青点の集合  $B$  が与えられたとき、 $R \cup B$  上の無交差な幾何的全域木で、最大次数が  $k$  以下で葉の集合が  $B$  となるものが存在するための条件を求めることである。このような全域木があれば  $|B| \leq (k-2)|R| + 2$  という不等式が成り立つが、これが十分条件にもなることを示すことが目標である。ここで幾何的全域木とは、すべての辺が直線分からなるものをいう。

### 3. 研究の方法

これまでに得られた関連する定理の証明方法を調べることが出発点である。これらの手法を改良しながら上記の問題の解決を目指す。さらに、グラフの全域木の研究からグラフ因子の研究につながる結果が得られることも、またその逆もあるので、全域木の問題に限定せずに、グラフの因子に関する問題も意識しながら研究を進める。

### 4. 研究成果

虹全域木が存在するための必要十分条件は2006年にAkbari-Alipourと鈴木によって独立に求められており、その証明は多項式時間アルゴリズムも与えている。しかし、虹全域木が存在するための十分条件は、着色された完全グラフ  $K_n$  におけるものに限られていた。例えば (i) 辺着色された  $K_n$  において、任意の色  $c$  に対して、 $c$  で着色された辺が  $n/2$  本以下なら虹全域木が存在する。(ii)  $n-1$  色以上で着色されており、最大次数が  $(n+3)/2$  以下なら虹全域木が存在する。

研究代表者らは一般の辺着色されたグラフにおいて虹全域木が存在するための、初めてとなる良い十分条件を得ていた。それは、『辺着色された位数  $n$  の連結グラフを  $G$  とする。(i) もし  $G$  の最小色次数が  $n/2$  以上で、各色  $c$  に対して、色  $c$  の辺から誘導される部分グラフが星グラフなら、 $G$  には虹全域木が存在する。(ii) もし  $G$  の最小色次数が  $n/2$  以上で、各色  $c$  に対して、色  $c$  の辺から誘導される部分グラフの位数が  $(n/2)+1$  以下なら、 $G$  には虹全域木が存在する』というものである([1]参照)。

[1] Y.Cheng, M.Kano and G.Wang, Properly Colored Spanning trees in Edge Colored Graphs, *Discrete Mathematics*, **343** (2020) 111629,

今回の研究ではまずこれを拡張した次の定理1を得た。定理2は上の結果を2部グラ

フに適用すると、条件を弱くできることを示している。

**定理 1.** 辺着色された位数  $n$  の連結グラフを  $G$  とする。もし隣接する 2 点の色次数の和が  $n$  以上で、各色  $c$  に対して、色  $c$  の辺から誘導される部分グラフが星グラフなら、 $G$  には虹全域木が存在する。また、もし隣接する 2 点の色次数の和が  $n$  以上なら彩色全域木が存在する。

**定理 2.** 辺着色された位数  $n$  の連結 2 部グラフを  $G$  とする。もし最小色次数が  $n/3$  以上で、色数が  $n-1$  以上で、かつ各色  $c$  に対して、色  $c$  の辺から誘導される部分グラフの位数が  $(n/3)+1$  以下なら、 $G$  には虹全域木が存在する。また、もし最小色次数が  $(n/3)+1$  以上なら彩色全域木が存在する。

これらの結果は次の論文にある。

[2] M.Kano, S.Maezawa, K.Ota, M.Tsugaki and T.Yamashita, Color degree sum conditions for properly colored spanning trees in edge-colored graphs, *Discrete Mathematics*, **343** (2020) 112042.

[3] M.Kano and M.Tsugaki, Rainbow and properly colored spanning trees in edge-colored bipartite graphs, *Graphs and Combinatorics*, **37** (2021) 1913–1921.

Stem( $T$ )がある条件を満たすような全域木の存在については、新しい結果が得られていない。一方、次のような直径が指定された全域木が存在するための十分条件を得た。

**定理 3.**  $G$  を位数  $n$  の連結グラフとする。(i) もし  $d$  が 4 以上の偶数で、 $G$  の最小次数が  $3n/(d+2)$  以上なら、 $G$  には直径が  $d$  以下の全域木が存在する。(ii) もし  $d=5, 7, 9$  で、 $G$  の最小次数が  $3n/(d+2)$  以上なら、 $G$  には直径が  $d$  以下の全域木が存在する。(iii) もし  $G$  の最小次数が  $3n/(d+1)$  以上なら、 $G$  には直径が  $d$  以下の全域木が存在する。

これは下記の論文で発表した。

[4] M.Kano and H.Matsumura, Spanning trees with small diameters, *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics*, **17** (2020) 329–334.

この他グラフの因子に関する論文を 5 本発表した。

平面上の赤点と青点の幾何的全域木については次の結果を得た。

**定理 4.** 平面上に与えられた赤点の集合  $R$  と青点の集合  $B$  に対して、 $R \cap B$  は一般の位置にあり、かつ関数  $f: R \rightarrow \{2, 3, 4, \dots\}$  は  $2 \leq |B| \leq \sum_{x \in R} (f(x) - 2) + 2$  を満たす。すると、 $R \cup B$  上の無交差な幾何的全域木  $T$  で、すべての葉は青点で、すべての内点 (次数 2 以上の点) は赤点で、かつ任意の赤点  $x$  において  $2 \leq \deg T(x) \leq f(x)$  を満たすものが存在する。

この定理の証明の主要な部分は最近発表された別の論文から容易に得られるとのレフリーの指摘があり、一般のジャーナルでの発表は断念し、arXiv での発表にとどめた。

[5] M.Kano, K.Noguchi, D.Orden, Non-crossing geometric spanning trees with bounded degree and monochromatic leaves on bicolored point sets, *arXiv*: 1812.02866

この他、平面上に与えられた多色点集合上の離散幾何に関して 3 本の論文を発表した。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計11件（うち査読付論文 11件 / うち国際共著 7件 / うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Mikio Kano, Masao Tsugaki	4. 巻 37
2. 論文標題 Rainbow and properly colored spanning trees in edge-colored bipartite graphs	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Graphs and Combinatorics	6. 最初と最後の頁 1913 1921
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00373-021-02334-5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 D. Penaloza, M. Kano, L. Martinez-Sandoval, D. Orden, J. Tejel, C.D. Toth, J. Urrutia, B. Vogtenhuber	4. 巻 344
2. 論文標題 Rainbow polygons for colored point sets in the plane	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Discrete Mathematics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.disc.2021.112406	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する
1. 著者名 Mikio Kano, Jorge Urrutia	4. 巻 37
2. 論文標題 Discrete geometry on colored point sets in the plane -- A survey	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Graphs and Combinatorics	6. 最初と最後の頁 1 53
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00373-020-02210-8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 M.Kano, S. Maezawa, K. Ota, M. Tsugaki, T. Yamashita	4. 巻 343
2. 論文標題 Color degree sum conditions for properly colored spanning trees in edge-colored graphs	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Discrete Mathematics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.disc.2020.112042	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yoshimi Egawa, Mikio Kano, Maho Yokota	4. 巻 283
2. 論文標題 Existence of all generalized fractional (g,f)-factors of graphs	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Discrete Applied Mathematics	6. 最初と最後の頁 265 271
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.dam.2020.01.014	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hongliang Lu, Mikio Kano	4. 巻 343
2. 論文標題 Characterization of 1-tough graphs using factors	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Discrete Mathematics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.disc.2020.111901	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Mikio Kano, Hajime Matsumura	4. 巻 17
2. 論文標題 Spanning trees with small diameters	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics	6. 最初と最後の頁 329 334
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.akcej.2019.03.010	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yangyang Cheng, Mikio Kano, Guanghui Wang	4. 巻 343
2. 論文標題 Properly Colored Spanning trees in Edge Colored Graphs	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Discrete Mathematics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.disc.2019.111629	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Zheng Yan, Mikio Kano	4. 巻 40
2. 論文標題 Strong Tutte type conditions and factors of graphs	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Discussiones Mathematicae Graph Theory	6. 最初と最後の頁 1057 1065
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.7151/dmgt.2158	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Mikio Kano, Hongliang Lu, Qinglin Yu	4. 巻 26
2. 論文標題 Fractional Factors, Component Factors and Isolated Vertex Conditions in Graphs	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 The Electronic Journal of Combinatorics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.37236/8498	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 B. M. Abrego, S. Fernandez-Merchant, M. Kano, D. Orden, P. Perez-Lantero, C. Seara, J. Tejel,	4. 巻 21
2. 論文標題 $K_{\{1,3\}}$ -covering red and blue points in the plane	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.23638/DMTCS-21-3-6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計11件 (うち招待講演 3件 / うち国際学会 5件)

1. 発表者名 加納 幹雄
2. 発表標題 3-正則グラフの着色次数因子
3. 学会等名 第33回位相幾何学的グラフ理論研究集会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Mikio Kano
2. 発表標題 Rainbow and properly colored spanning trees in edge-colored bipartite graphs
3. 学会等名 The 23rd Thailand-Japan Conference on Discrete and Computational Geometry, Graphs, and Games (TJCDCG3 2020+1) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 加納 幹雄
2. 発表標題 All generalized fractional $(g,f)$ -factors of graphs
3. 学会等名 離散数学とその応用研究集会2020 JCCA2020-DMIA2020-SGT9
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 加納 幹雄
2. 発表標題 辺着色された2部グラフの虹全域木と彩色全域木
3. 学会等名 第32 回位相幾何学的グラフ理論研究集会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 加納 幹雄
2. 発表標題 着色グラフの全域木
3. 学会等名 2020組合せ論とその周辺研究集会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Mikio Kano
2. 発表標題 Rainbow and k-chromatic spanning trees in edge-colored graphs
3. 学会等名 2019 Workshop on the theory of colored graphs (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 加納 幹雄
2. 発表標題 グラフ理論における偶奇性に関連する現象
3. 学会等名 RIMS総合研究セミナー「組合せ最適化セミナー」(招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 加納 幹雄
2. 発表標題 グラフの偶奇性に関する新旧の話題
3. 学会等名 離散数学とその応用研究集会2019(DMIA2019) (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Mikio Kano
2. 発表標題 Fractional Factors, Component Factors and Isolated Vertex Conditions in Graphs
3. 学会等名 The 11th Hungarian-Japanese Symposium on Discrete Mathematics and Its Applications (国際学会)
4. 発表年 2019年



1. 発表者名 Mikio Kano
2. 発表標題 Perfect rainbow polygons for colored point sets in the plane
3. 学会等名 XVIII Spanish Meeting on Computational Geometry (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Mikio Kano
2. 発表標題 Perfect rainbow polygons for colored point sets in the plan
3. 学会等名 Japan conference on discrete geometry and computational geometry, graphs and games (国際学会)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
メキシコ	Universidad Nacional Autonoma de Mexico,			
中国	西安交通大学	西安交通大学	山東大学	
カナダ	Thompson River University			
スペイン	Universidad Alcala	Universidad Zaragoza		
オーストリア	Graz University of Technology			

共同研究相手国	相手方研究機関			
米国	California State University Northridge			