2版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　６年　９月１７日現在

機関番号：１２６０１

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2019～2023

課題番号：１９Ｋ０３５９９

研究課題名（和文）整列性の証明論的研究

研究課題名（英文）Proof-theoretic investigations on wellfoundedness

研究代表者

新井　敏康（Arai，Toshiyasu）

東京大学・大学院数理科学研究科・教授

研究者番号：４０１９３０４９

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,100,000円

研究成果の概要（和文）：順序数上の正則関数gによる整列性原理WOP(g)は「任意の整列集合Xに対してg(X)も整列」という主張であり,正則関数gの取り方によりその証明論的強さが異なることが知られていたが，それらの結果は，既に証明論的強さが既知であったComprehension AxiomなどとWOP(g)が同等であることを通じて得られていた．
そこで 一般にWOP(g)の証明論的順序数は正則関数gの最小不動点と等しいことを示した．証明の鍵は，整礎性の証明から埋め込みを抽出すること，及びその埋め込みのg(X)におけるg-項の識別不可能性を用いた拡張にある．

研究成果の学術的意義や社会的意義
整列性原理WOP(g)は証明論において考察するのが極めて自然な原理である．その証明論的強さを正則関数gによらずに一様に与えた学術的意義は小さくない．さらにgの微分g'による整列性原理WOP(g')が「任意に大きいWOP(g)のオメガモデルの存在」と同等であるという事実も示したが，これも逆数学の文脈で意義のある結果である．
　それらの定理の証明に用いた事実は二つあった.一つは整礎性の証明から埋め込みを抽出すること，二つ目にその埋め込みのg(X)におけるg-項の識別不可能性を用いた拡張にある．前者はGentzen-Takeutiの結果から得られるが，後者は全く新しい観点に基づいている．

研究成果の概要（英文）：The well ordering principle WOP(g) for a normal function g on ordinals states that whenever a well order X is given, g(X) is also a well order. Its proof-theoretic strength is known to depend on the normal functions g. Proofs of these facts were obtained by showing that WOP(g) is equivalent to a Comprehension Axiom, whose strength has been determined.
We show in general that the proof-theoretic ordinal of WOP(g) is equal to the least fixed point of the normal function g. The key in our proof lies in an extraction of an embedding from derivations of the well-foundedness, and of an extendability of embeddings through an indiscernibility of g-terms in g(X).

研究分野：数学基礎論

キーワード：proof theory

１．研究開始当初の背景

順序数上の正則関数 g とは，狭義単調増加かつ順序位相に関して連続な関数を意味する．また正則関数 g による整列性原理 WOP(g)は，「任意の整列集合 X に対して g(X)も整列」という主張である．ここで g(X)は集合 X の関数 g による像を表している．
整列性原理 WOP(g)は正則関数 g の取り方によりその証明論的強さが異なることが知られていたが,それらの結果は,既に証明論的強さが既知であった Comprehension Axiom などと WOP(g)が同等であることを通じて得られていた.例えば g がオメガによる指数関数であるときには，WOP(g)は ACA と同等であることが J.-Y. Girard によって示されていた．従ってこの場合の WOP(g) の証明論的順序数は最小のイプシロン数となる.また g がカントールのイプシロン数の数え上げ関数であるときには，WOP(g)が ACA+と同値になることが Afshari-Rathjen により示されていた.ここで ACA+は ACA0(Arithmetical Comprehension Axiom with restricted induction)に「任意に大きい ACA のオメガモデルが存在する」という公理を付け加えた公理系である.
これら個別の諸結果は証明論だけではなく逆数学の研究からも注目されていた.

２．研究の目的

証明論において研究することは極めて自然である整列性原理 WOP(g)の一般論を構築する.

すなわち，個別の正則関数 g ごとの WOP(g)を考察するのではなく，既知の結果すべてがある一つの原理の特殊例たちであるとの着眼に基づいて，整列性原理 WOP(g)の証明論的強さを，正則関数 g によらない一様な方法で決定する.そのことと並行して，整列性原理 WOP(g)の証明論的研究を行う.そのために,整列性原理 WOP(g)を含んだ証明図から以下にしてカットを消去するかという新しい技法を編み出す.

３．研究の方法

整列集合 g(X)の整列性の証明を直接， 証明論的に分析する.すなわちそのような証明が任意に与えられたとき， まずそれを推件計算で表して， そこでカット消去を行なって，その順序型の上界を抽出する.
このような証明論的研究は従来には無かったので，新しい考察を要する.
少々， 具体的に述べれば， ある順序(X,<)の整列性を示す証明が与えられたとき， 順序(X,<)から順序数体系 Y への埋め込み写像 F をその証明から計算可能なかたちで抽出する． このこと自体は，G. Gentzen やその証明の細密化である竹内外史の証明から可能であることが予想される.
問題はこの埋め込み F を，g(X)から g(Y)への埋め込みに拡張することにある.なぜならば整列性原理 WOP(g)は， 「X が整列集合ならば g(X)も整列集合である」という主張であるから，これを証明図では「X が整列集合である証明が与えられたら，g(X)も整列集合であることを結論する」推論規則として述べられる.よって上記のような埋め込みの拡張が得られれば,それによってこの推論規則による証明のカット消去後の高さの上界が得られることになるからである.

４．研究成果

ACA0 上で考えたとき， 整列性原理 WOP(g)の証明論的順序数が正則関数 g の最小不動点 g’(0)に等しいことを示した.整列性原理 WOP(g)の仮定のもとで g’(0)より小さい順序数までの整列性が従うことを見るのは容易い． なぜなら g’(0)は g を任意有限回数適用して得られる順序数たち g(g(...g(0)...))の上

限だからである.
逆にWOP(g)からACA0上で整列性が証明できる整列順序(X,<)の順序型が g’(0)よりも小さいことを示すためには，その証明を解析しなければならない.
さらにgの微分g’に対する整列性原理 WOP(g’) が「任意に大きいWOP(g) のオメガモデルの存在」と同値であることも示した． この後者の結果は,Rathjenのアイデアも援用して得られた.すなわち，WOP(g)が矛盾することを示す証明（は実際には存在しないが）の存在を仮定して，その事実を示す証明をSchuetteの方法で逆向きに探索する.得られた木が整礎的でないことを示すために整列性原理 WOP(g’)を用いる. そして木の無限の枝からWOP(g) のオメガモデルをつくることができるのである.ここで証明探索をする際には， 任意に与えられた自然数の集合Hのダイアグラムを公理として付け加える.これにより得られたオメガモデルがHを含むことになる.

例えば g がオメガによる指数関数であるときには,g’はカントールのイプシロン数の数え上げ関数となる. このとき WOP(g’)は後者の結果から，「任意に大きい WOP(g) のオメガモデルの存在」と同値であることが分かるが， ここでのWOP(g)は J.-Y. Girard の結果から ACA と同値であるから, Afshari-Rathjen の結果が特殊ケースとして得られる.また Rathjen や Rathjen-Weiermann の結果もすべて上記の一般的結果の特殊ケースとして得られる.
また前者の結果より WOP(g’)の証明論的順序数はイプシロン数の数え上げ関数の最小不動点であることが分かるが， これは正にACA+の証明論的順序数に他ならない.

これらの証明において， 順序(X,<)の整礎性の証明から， 順序(X,<)から順序数体系Yへの埋め込み F を抽出することがまずは必要である. これは Gentzen-Takeuti-Schuetteによる証明を精査すれば得られるが新しい結果である.

さらに得られた埋め込み F を整列集合g(X)から順序数体系g(Y)への埋め込みに拡張する必要がある.これにより,整列性原理 WOP(g)を表す推論規則による証明からカットを消去した後の高さの上界が得られることになる.

この拡張は， g-項の整列集合 g(X)における（順序） 識別不可能性(order indiscernibility)に基づいてなされる. g-項の整列集合g(X)における（順序）識別不可能性とは， g(X)における順序数項たちの間の順序関係が， 本質的にはそれらの順序数項に含まれる g-項たちの順序関係のみに帰着して決定されるという事実であり,従来はFefermannやGirardにより指摘されてはいたが， 識別不可能性を用いた埋め込みの拡張はまったく新しい考察である.
より一般的な文脈においては， モデル論での Ehrenfeucht-Mostowski の定理で述べられているように， モデルMでの識別不可能集合IからモデルNでの識別不可能Jへの埋め込みが与えられたとき， それをMからNへの（初等）埋め込みに拡張できることが知られているが,我々の証明はこの定理からインスピレーションを得ている.
さらにこの拡張は計算可能性等を保つものであり， この点も証明論研究において重要なものである.つまりもともとの与えられた証明から計算可能な埋め込み F が得られ，これをg(X) からg(Y)への計算可能な埋め込みに拡張されるのである.

以上により， 整列性原理 WOP(g)の証明論的研究の基礎は築かれた.この結果が得られた後に, Freund-Rathjen により dilators を用いた圏論的な証明も試みられている.

5．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計6件（うち査読付論文　6件／うち国際共著　3件／うちオープンアクセス　0件）

1．著者名 Toshiyasu Arai	4．巻 62
2．論文標題 Wellfoundedness proof with the maximal distinguished set.	5．発行年 2023年
3．雑誌名 Archives for Mathematical Logic	6．最初と最後の頁 333-357
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00153-022-00840-8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 ARAI TOSHIYASU、WAINER STANLEY S.、WEIERMANN ANDREAS	4．巻 27
2．論文標題 GOODSTEIN SEQUENCES BASED ON A PARAMETRIZED ACKERMANN?P?TER FUNCTION	5．発行年 2021年
3．雑誌名 The Bulletin of Symbolic Logic	6．最初と最後の頁 168～186
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1017/bsl.2021.30	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1．著者名 Toshiyasu Arai	4．巻 85
2．論文標題 A simplified ordinal analysisi of first-order reflection	5．発行年 2020年
3．雑誌名 Journal of Symbolic Logic	6．最初と最後の頁 1163，1185
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 Toshiyasu Arai, David Fernandez-Duque, Stan Wainer, Andreas Weiermann	4．巻 148
2．論文標題 Predicatively unprovable termination of the Ackermannian Gioodstein process	5．発行年 2020年
3．雑誌名 Proceedings of American Mathematical Society	6．最初と最後の頁 3567,3582
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1．著者名 Toshiyasu Arai	4．巻 59
2．論文標題 Proof-theoretic strengths of the well ordering principles	5．発行年 2020年
3．雑誌名 Archive sfor Mathematical Logic	6．最初と最後の頁 257,275
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1．著者名 Arai Toshiyasu、Fernandez-Duque David、Wainer Stanley、Weiermann Andreas	4．巻 148
2．論文標題 Predicatively unprovable termination of the Ackermannian Goodstein process	5．発行年 2020年
3．雑誌名 Proceedings of the American Mathematical Society	6．最初と最後の頁 3567-3582
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1090/proc/14813	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕　計3件（うち招待講演　2件／うち国際学会　2件）

1．発表者名 新井敏康
2．発表標題 順序数解析を考えている
3．学会等名 証明と計算の理論と応用（招待講演）
4．発表年 2021年

1．発表者名 Toshiyasu Arai
2．発表標題 Some results in proof theory
3．学会等名 Logic Colloquium（国際学会）
4．発表年 2019年

1．発表者名 Toshiyasu Arai
2．発表標題 Mahlo classes for first-order reflections
3．学会等名 Workshop on Proof Theory, Modal Logic and Reflection Principles（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2019年

〔図書〕　計2件

1．著者名 新井　敏康	4．発行年 2021年
2．出版社 東京大学	5．総ページ数 610
3．書名 数学基礎論　増補版	

1．著者名 Toshiyasu Arai	4．発行年 2020年
2．出版社 Springer	5．総ページ数 313
3．書名 Ordinal Anakysis with an Introduction to Proof Theory	

〔産業財産権〕

〔その他〕

researchmap
https://researchmap.jp/tosarai
https://researchmap.jp/tosarai

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関