

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 6 年 6 月 7 日現在

機関番号：11301

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2019～2023

課題番号：19K03601

研究課題名（和文）数理論理学の分野融合手法と量的な視点による証明論の新分野開拓

研究課題名（英文）Approaching proof theory from the viewpoint of proof size

研究代表者

横山 啓太（YOKOYAMA, Keita）

東北大学・理学研究科・教授

研究者番号：10534430

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,300,000円

研究成果の概要（和文）：証明論における分野融合的な手法を用いて、証明論の新分野開拓・理論構築を行い、数理論理学や理論計算機科学への応用を探った。具体的には、以下の成果が得られた。

1. 証明の量的な情報の分析手法を確立し、証明の長さやサイズが証明論的強さを細分化する尺度となりうることを示した。2. 変分問題における Ekeland の定理が強い公理系を要請することを発見し、解析学における未解決問題の難しさの証明に新たなアプローチを提供した。3. 弱い算術における MRDP 定理の証明可能性を仮定した下で、線形時間計算可能階層が非決定指数線形時間問題よりも真に小さいことを示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究で得られた、証明の複雑さに関する様々な尺度からの知見は、証明論と計算可能性理論の分野間の結びつけを強化し発展に貢献するものである。また、本研究で扱われたラムゼーの定理の証明論視点からの量的情報分析は、組み合わせ論への応用も期待される。

さらに、本研究で得られた成果は、数学の基礎に関する理解を深めることにもつながる。数学の基礎に関する研究は、数学全体の発展を支えるものでもある一方、数学と計算機科学を直結させる具体的な手法を提供する物でもある。自然科学の発展に寄与するだけでなく、計算機による検証や人工知能の安全性の担保等に対する具体的な技術の基盤となることも期待される。

研究成果の概要（英文）：We developed a new field of proof theory and its theoretical framework, and explored its applications to mathematical logic and theoretical computer science. Specifically, we obtained the following results:

1. We established a method for analyzing the quantitative information of proofs and showed that the length and size of proofs can be a measure to subdivide the proof-theoretic strength. 2. We discovered that Ekeland's variational principle requires a strong axiom system, which provided a new approach to proving the difficulty of problems in analysis. 3. We showed that the linear time hierarchy is strictly smaller than nondeterministic exponential linear time under the assumption of the provability of the MRDP theorem in weak arithmetic.

研究分野：数理論理学

キーワード：証明論 逆数学 計算可能性理論 ラムゼーの定理 算術のモデル理論 強制法 反映原理

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

(1) 研究開始当初の背景

研究代表者は長年、証明論における逆数学と呼ばれる分野の研究を行ってきた。証明論は数理論理学の中心分野の一つであり、数学の証明を形式化・記号化し、それを記号論や組み合わせ論の手法で解析することで、数学の理論展開に必要な公理体系やその無矛盾性などを研究する分野である。逆数学は数学の諸定理を数理論理学の諸種の尺度で分類する研究であり、証明論を用いて数学の諸定理の証明に必要な十分な公理を確定することで定理の強さを分類する。

逆数学では、解析学など幅広く数学を展開できる算術体系を基盤として、1970年代以降多くの数学の定理の分類がなされてきた。初期は計算可能性理論の公理化による視点・尺度を軸に分類が進められてきたが、その後、順序数の大きさで強さを測る証明論的強さや論理公理の強さといったより多様な尺度も導入され、逆数学の視点は拡張され続けている。

近年の逆数学分野の大きな動きとして、ラムゼイの定理の分類に関連した2つの長年の未解決問題の解決が挙げられる。研究代表者はそのうちの一つである「2次元ラムゼイの定理の証明論的強さを確定」する問題を解決し、分野の進展に大きく寄与した。これらの論文では、問題の解決とともに数理論理学関連の諸分野、すなわち証明論、計算可能性理論、算術のモデル論、有限組み合わせ論を融合する新しいアイデアが多数導入された。

そこで、研究代表者は、こうした新たな融合手法をより広い視点で証明論の発展に生かすべき時期と考え、本研究ではこれら新手法・融合手法を軸に、証明論の新分野開拓を目指した。特に、直近の研究において証明の長さ・サイズなどの「量的な情報」の抽出手法の萌芽が得られており、このアイデアを鍵として研究を行うこととした。

(2) 研究の目的

本課題では、数理論理学における分野融合的な手法により証明論の新分野開拓・理論構築を行い、さらにその数理論理学や理論計算機科学への応用を探ることを目的として研究を行った。具体的には、以下の4つの主要な達成目標に掲げて研究を進めた。

証明の諸種の量的な情報、特に証明の長さや保存性証明の関係性の分析とその一般論の構築：証明論的強さの等しい公理体系間の証明のサイズ・長さの解析を通して、証明のサイズや長さを証明論的強さの汎用的な細分化尺度として利用できるように整備することを目指す。

強制法、反映原理、有限組み合わせ命題の相互翻訳による証明の量的な情報の不変量化：有限組み合わせ命題、反映原理の有限断片、対応する強制法の強制概念の等価性を証明し、証明の量的な情報を数学的扱いが容易な不変量で表現することを目指す。

証明論の手法の計算機科学、特に計算量理論への応用：証明論の知見を計算量理論に応用し、「線形時間計算可能階層」の分離問題の解決に貢献することを目指す。

強い公理を要請するような解析学の定理の発見とその分析：解析学、特に最適化問題や微分方程式における抽象度の低い定理で、証明論的強さの強い公理と同値になる例を探し、その理論的背景を探る。

また、これらの研究課題を通じて、以下のように分野そのものの基盤の発展も目指した。

- **証明論の新分野開拓**：証明の長さに着目した新しい証明論の理論的基盤を構築する。
- **数理論理学・理論計算機科学への貢献**：得られた知見・手法を応用し、計算量理論の未解決問題や、数学の未解決問題の難しさの証明に貢献する。

(3) 研究の方法

研究期間を通して、主に以下の手法を用いて研究を進めた。

証明論的手法：数学の証明を形式化・記号化し、記号論や組み合わせ論の手法で解析することで、数学の理論展開に必要な公理体系やその無矛盾性などを研究した。

逆数学的手法：数学の諸定理を数理論理学の尺度で分類し、証明論を用いて定理の証明に必要な公理を特定することで、定理の強さを分類した。

モデル理論的手法：算術体系の超準モデルの構造を計算可能性・再帰的飽和性・コード化モデルの同型性等に着目して分析し、その構造や性質を明らかにすると共に証明論における保存性証明への応用手法を確立した。

有限組み合わせ論的手法：有限集合における組み合わせ構造を順序数指標を導入して研究し、その結果を証明論や逆数学に応用した。

強制法：強制法は集合論における標準手法であるが、本研究では、特に算術における強制法を用いて、組み合わせ命題の逆数学的研究を行った。

反映原理：無矛盾性を一般化した概念であり、ゲーデルの不完全性定理を詳細に分析することで現れる。本研究では、反映原理の有限断片を有限組み合わせ命題により表現し、「証明の量的な情報」を表す不変量として捉えた。

計算量理論：計算複雑性の理論であり、アルゴリズムの計算時間や必要なメモリ量を解析する。本研究では、証明論の知見を計算量理論に応用し、「線形時間計算可能階層」の分離問題に取り組んだ。

これらの手法を組み合わせ、証明論における新しい理論的基盤の構築、証明の量的な情報の分析、計算量理論への応用、解析学における未解決問題へのアプローチなど、多岐にわたる成果を達成した。

(4) 研究成果

本研究で得られた成果の概要は以下の通りである。

証明の量的な情報の分析手法を確立：証明の長さやサイズといった量的な情報が、証明論的強さをより細かく分類する尺度となりうることを示した。これは証明の複雑さを測る新たな視点を与え、証明論における新たな研究の方向性を示唆するものである。

強制法・反映原理・有限組み合わせ命題の相互翻訳による証明の量的な情報の不変量化：一定の文脈・条件の下でこれら3つの概念の等価性を示すことで、証明の量的な情報をより扱いやすい数学的不変量として表現できる可能性を示した。これは証明の複雑さを数学的に解析するための新たな道具を提供するものである。

計算量理論への貢献：弱い算術において、MRDP 定理の証明可能性を仮定することで、「線形時間計算可能階層」が「非決定指数線形時間問題」よりも真に小さいことを示した。これは、計算複雑性理論における重要な未解決問題の一つである「P = NP 問題」に類似した問題であり、本研究の成果は証明論の視点を通じて計算量理論に関する理解を深めることに貢献するものである。

解析学における未解決問題への新たなアプローチ：変分問題における Ekeland の定理が、従来の解析学の逆数学では現れなかった強い公理系を必要とすることを発見した。これは、解析学における未解決問題の難しさを証明論的に示す新たなアプローチを提供するものである。

新たな研究課題の創出：計算可能性理論における Weihrauch 次数の「一階部分」の概念の導入、Weihrauch 次数と非可述的公理系の関係性、決定可能性公理と反映原理の関係性等の逆数学視点を通じた新たな証明論と計算可能性理論の視点の融合の萌芽が多数得られた。

年度ごとの具体的な成果は次の通りである。

2019 年度

- **証明の量的な情報の分析手法を確立**：証明の長さやサイズといった量的な情報が、証明論的強さをより細かく分類する尺度となりうることを示した。これは、証明の複雑さを測る新たな視点を与え、証明論における新たな研究の方向性を示唆するものとなった。

- **ラムゼイの定理の解析**：無限ラムゼイの定理や制限原理と呼ばれる公理を用いた証明において、強制法を用いてそのサイズ・長さについての部分的な結果を得た。また、有限組み合わせ命題と反映原理の有限断片の等価性、および反映原理の有限断片と特定の強制法の強制概念の等価性を示した。これらの3つの概念の等価性をラムゼイの定理のケースで示した。
- **計算量理論への貢献**：弱い算術という枠組みにおいて、MRDP 定理と呼ばれる命題の証明可能性を仮定することで、「線形時間計算可能階層」が「非決定指数線形時間問題」よりも真に小さいことを示した。
- **解析学における未解決問題への新たなアプローチ**：変分問題における Ekeland の定理が、従来の解析学の逆数学では現れなかった強い公理系を必要とすることを発見した。

2020 年度

- **証明の量的な情報の分析手法の発展**：証明の長さが既存の保存性証明による証明論的強さの分類尺度をある意味で細分化することを示し、組み合わせ命題や帰納法公理などいくつかの場合において、具体的に証明の長さによる公理系や命題の強さの分類に成功した。
- **強制法、反映原理、有限組み合わせ命題の相互翻訳**：前年度に引き続き、3つの概念の等価性をより一般的立場で示す研究に取り組んだ。
- **計算量理論への応用**：反映原理に類似する手法で調べ、これを通常の計算量より精密なパラメータ付き計算量の問題に翻訳する手法をより精密化した。
- **Ekeland の定理と Caristi の不動点定理の解析**：前年度に引き続きこれらの定理の証明における高い抽象性に着目し、特に Caristi の不動点定理の強さを精密に解析した。

2021 年度以降

- **証明の長さに関する研究**：引き続き、証明の長さが既存の保存性証明による証明論的強さの分類尺度をある意味で細分化することを示し、組み合わせ命題や帰納法公理などいくつかの場合において、具体的に証明の長さによる公理系や命題の強さの分類に成功した。
- **強制法、反映原理、有限組み合わせ命題の相互翻訳**：引き続き、3つの概念の等価性を示す研究に取り組み、決定性小売等の枠組みでもこのような相互翻訳が現れることを発見した。
- **Ekeland の定理と Caristi の不動点定理の解析**：前年度に引き続き Caristi の不動点定理の強さを精密に解析し、可述非可述の中間領域に広がる階層と Caristi の不動点定理の階層の関係性を明らかにした。
- 得られた成果の論文執筆を進め、7編の国際共著を含む9編の論文を出版し、さらに2編の論文が採録決定済み、1編が査読中となっている。

以上の成果は、証明論、逆数学、計算量理論、解析学といった数学の様々な分野にまたがるものであり、学術的に大きな意義を持つ。また、証明の自動生成や検証といった情報科学分野への応用可能性も示唆しており、将来的には、より広範な分野への波及効果が期待される。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計9件（うち査読付論文 8件/うち国際共著 7件/うちオープンアクセス 3件）

1. 著者名 Fernandez-Duque D., Shafer P., Towsner H., Yokoyama K.	4. 巻 381
2. 論文標題 Metric fixed point theory and partial impredicativity	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1098/rsta.2022.0012	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 KOLODZIEJCZYK LESZEK ALEKSANDER, KOWALIK KATARZYNA W., YOKOYAMA KEITA	4. 巻 -
2. 論文標題 HOW STRONG IS RAMSEY'S THEOREM IF INFINITY CAN BE WEAK?	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 The Journal of Symbolic Logic	6. 最初と最後の頁 1~20
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/jsl.2022.46	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Kolodziejczyk Leszek Aleksander, Wong Tin Lok, Yokoyama Keita	4. 巻 -
2. 論文標題 Ramsey's theorem for pairs, collection, and proof size	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Logic	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/S0219061323500071	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Leszek Aleksander Kolodziejczyk and Keita Yokoyama	4. 巻 12183
2. 論文標題 In search of the first-order part of Ramsey's theorem for pairs	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Lecture Notes in Computer Science	6. 最初と最後の頁 297--307
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-3-030-80049-9_27	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Fernandez-Duque David、Shafer Paul、Yokoyama Keita	4. 巻 26
2. 論文標題 Ekeland's variational principle in weak and strong systems of arithmetic	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Selecta Mathematica	6. 最初と最後の頁 38 pages
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00029-020-00597-z	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Kolodziejczyk Leszek Aleksander、Yokoyama Keita	4. 巻 26
2. 論文標題 Some upper bounds on ordinal-valued Ramsey numbers for colourings of pairs	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Selecta Mathematica	6. 最初と最後の頁 18 pages
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00029-020-00577-3	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Nies Andre、Triplett Marcus A.、Yokoyama Keita	4. 巻 -
2. 論文標題 The reverse mathematics of theorems of Jordan and Lebesgue	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 The Journal of Symbolic Logic	6. 最初と最後の頁 1~18
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/jsl.2021.16	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Yokoyama Keita	4. 巻 -
2. 論文標題 The Paris-Harrington principle and second-order arithmetic--bridging the finite and infinite Ramsey theorem	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Proceedings of the International Congress of Mathematics 2022	6. 最初と最後の頁 1504~1528
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4171/icm2022/106	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 FUJIWARA MAKOTO、ISHIHARA HAJIME、NEMOTO TAKAKO、SUZUKI NOBU-YUKI、YOKOYAMA KEITA	4. 巻 29
2. 論文標題 EXTENDED FRAMES AND SEPARATIONS OF LOGICAL PRINCIPLES	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 The Bulletin of Symbolic Logic	6. 最初と最後の頁 311 ~ 353
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/bsl.2023.29	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

[学会発表] 計16件 (うち招待講演 10件 / うち国際学会 11件)

1. 発表者名 Keita Yokoyama
2. 発表標題 Reverse mathematics from multiple points of view
3. 学会等名 Japan forum associated with ICM 2022, RIMS Kyoto, Japan, June 13, 2022. (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Keita Yokoyama
2. 発表標題 Reverse mathematics from multiple points of view
3. 学会等名 International Congress of Mathematics 2022, Sectional Speaker (Logic), online, July 13, 2022. (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 横山啓太
2. 発表標題 自然数論のモデルと逆数学
3. 学会等名 日本数学会, 企画特別講演, 中央大学, 2023年3月. (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 横山啓太
2. 発表標題 算術の超準モデル論
3. 学会等名 Logic Winter School 2023, 沖縄青年会館, 那覇, 2023年2月20-21日.
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Leonardo Pacheco and Keita Yokoyama
2. 発表標題 Determinacy and reflection principles in second-order arithmetic
3. 学会等名 Workshop on Reverse Mathematics and its Philosophy, Paris, France, June 13-17, 2022 (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Keita Yokoyama
2. 発表標題 Reverse mathematics and proof and model theory of arithmetic
3. 学会等名 Computability in Europe 2021 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Keita Yokoyama
2. 発表標題 Classifying theorems: reverse mathematics and its multiple viewpoints
3. 学会等名 World Logic Day Workshop 2022 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Keita Yokoyama
2. 発表標題 Automorphism argument and reverse mathematics
3. 学会等名 Computability Theory and Applications Seminar (国際オンラインセミナー) (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Keita Yokoyama
2. 発表標題 Forcing interpretation, conservation and proof size
3. 学会等名 Proof Theory Virtual Seminar (国際オンラインセミナー) (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Keita Yokoyama
2. 発表標題 On the unique existence conservation theorem for WKL
3. 学会等名 Workshop on Effective descriptive set theory, computable analysis and automata (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Keita Yokoyama
2. 発表標題 On the first-order consequences of Ramsey's theorem over RCA_0^*
3. 学会等名 Workshop on Proof Theory, Modal Logic and Reflection Principles (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Keita Yokoyama
2. 発表標題 Recent progress on the study of the first-order part of Ramsey's theorem for pairs
3. 学会等名 Mathematical Logic and Constructivity (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Keita Yokoyama
2. 発表標題 Approaching the first-order part of Ramsey's theorem for pairs and two colors
3. 学会等名 Workshop on Computability Theory 2019 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Keita Yokoyama
2. 発表標題 Recent struggling for the first-order part of Ramsey's theorem for pairs
3. 学会等名 Reverse Mathematics of Combinatorial Principles, CMO-BIRS meeting (19w5111) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Keita Yokoyama
2. 発表標題 Finitary infinite pigeonhole principle and Ramsey's theorem in reverse mathematics
3. 学会等名 Computability in Europe 2019 (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Keita Yokoyama
2. 発表標題 Terrence Tao's finitary infinite pigeonhole principle and proof-theory
3. 学会等名 2019 SJTU-JAIST-NU Follow-Up Workship on Formal Methods
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

Researchmap https://researchmap.jp/read0145758
--

6. 研究組織		
氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
ポーランド	ワルシャワ大学			
シンガポール	シンガポール国立大学			
英国	リーズ大学			
ベルギー	ヘント大学			
米国	コネチカット大学			

共同研究相手国	相手方研究機関			
フランス	Institut Camille Jordan			
中国	復旦大学			