

令和 5 年 6 月 8 日現在

機関番号：13901

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2019～2022

課題番号：19K03602

研究課題名(和文) 計算可能性理論, 記述集合論, 位相空間論における階層の究極的解析

研究課題名(英文) Ultimate analysis of hierarchies in computability theory, descriptive set theory, and general topology

研究代表者

木原 貴行 (Kihara, Takayuki)

名古屋大学・情報学研究科・准教授

研究者番号：80722701

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：計算可能性理論, 記述集合論, 位相空間論における階層的構造の統一的観点からの解明を目指した研究を行った。記述集合論におけるWadge次数の理論においては, ボレル可測関数の可測還元による構造分析, ランク ≤ 2 周辺の解析によるFournierの問題の解決, Louveauの定理のBQ0値関数への拡張などの結果を得た。位相的側面については, 種々の位相空間の次数スペクトルの分析, 特に ω_1 -連続領域の枚挙問題の解決, 高階計算論を用いたde Groot双対の新機軸の研究などを行った。他にも実効トポスのLT-位相に関するLee-van Oostenの問題の解決や総合記述集合論との関連付けなどを行った。

研究成果の学術的意義や社会的意義

計算可能性理論および記述集合論に関する様々な問題の解決や新機軸の研究を行うことで, 計算可能性, 記述複雑性, 定義複雑性に関する学術的知見を深めた。また, 本研究は世界中の様々な研究者に波及し, Lutz-Siskindによる保測写像および順序保存写像に対する第一マーティン予想の解決, Day-Marksによる分解可能性予想の解決など, 長きに亘り未解決であった大未解決問題の進展に繋がったなど, 学術的影響は大きい。

研究成果の概要(英文)：I have conducted research aimed at analyzing hierarchical structures in computability theory, descriptive set theory, and general topology. Major results include, in the theory of Wadge degrees in descriptive set theory, structural analysis of Borel measurable functions by measurable reduction, solution of Fournier's problem around Wadge rank ≤ 2 , and extension of Louveau's theorem to BQ0-valued functions. On the topological side, I analyzed the degree spectra of various topological spaces, in particular, gave a numbering of ω_1 -continuous domains, and studied a new innovation of de Groot duals using higher-order computability. Other topics include the solution of Lee-van Oosten's problem on the LT-topologies on the effective topos, its connection with synthetic descriptive set theory and the construction of a convenient construction method for models in constructive reverse mathematics, and so on.

研究分野：計算可能性理論

キーワード：記述集合論 計算可能性理論 決定性公理 構成的逆数学 次数スペクトル 実効トポス ベター擬順序 高階計算可能性

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

記述集合論において、「分解可能性予想」と呼ばれる未解決問題が昨今にわかに注目を浴びることとなった。分解可能性予想とは、可測性に関するある種の条件を持つボレル可測関数はより低いボレル階数の関数に分解できる、という形式の予想群である。

計算可能性理論において、「マーティン予想 (第 5 Victoria Delfino 懸賞問題)」とは、次数不変作用素の整列性に関するある種の予想である。マーティン予想は 1970 年代に Cabal によって公表されて以来、計算可能性理論における最も重要な予想として、多数の研究者の注目を浴び続けているが、現在も未解決である。

2018 年頃、Carroy と報告者は、ボレル関数の分解可能性に関する Solecki ダイコトミーから「チューリング次数に関する不等式を導出できる」ことに気づき、この不等式がマーティン予想と深い関連があることを発見した。報告者らによるの新発見は、2 つの主要未解決問題の解決への期待を抱かせるものであった。

2. 研究の目的

応募者の先行研究に基づく統合的観点から、この二大予想を捉え直し、計算可能性理論、記述集合論、位相空間論における階層的構造の統合的観点からの解明が目的であった。

本研究課題において、その解明のための主たる道具が Wadge 次数の理論である。Wadge の理論は、連続写像による還元によって位相空間の部分集合や写像の位相的複雑性を測る指標を与える。これは位相的階層構造に対する最大限に精密な指標を与えることから、位相的複雑性の《究極的解析》として知られる。

本研究の主目的は、分解可能性予想やマーティン予想の解決へと歩を進めることであったが、それ以外にも、BQO 値可測関数の Wadge 次数構造の研究を非ボレル関数へと拡張すること、高階関数空間の抽象的構造の解明、特に不連続関数オラクルに相対化した際の圏論的性質の分析などがあった。

3. 研究の方法

本研究は、数学的な理論研究であり、特別な研究施設や設備は必要ない。本研究で行うことは、具体的な空間の計算可能性構造を次々と分析することによるサンプルの収集と、それに基づく一般論の構築である。また、研究計画の一部が順調に進展しない可能性に備え、積極的に共同研究を展開している。

4. 研究成果

1. 記述集合論 / Wadge 次数と BQO 理論:

本研究の主軸となる概念は、位相複雑度の《究極的解析》として知られる Wadge 次数の理論である。

1a) 近年 Day-Downey-Westrick によって、実関数の位相的複雑性を測る順序が導入された。この研究の過程で、実関数の並行連続 Weihrauch 次数が計算可能性理論における一様マーティン予想と関連付けられることを示した結果は、Israel J. Math (2022) に出版された。

1b) ベター擬順序 (BQO) 値ボレル可測関数の Wadge 次数構造に関する木原-Montalban の同型定理を拡張し、Selivanov と共に、還元を連続関数からボレル可測関数の各ランクに置き換えても対応する同型定理が成立することを示した。具体的には、第 ω_1 -可測関数の ω_1 -可測還元次数が第 ω_1 -可測関数の ω_1 -可測還元次数と同型であり、さらにこれらは可算整礎森の準同型順序の超限ヴェブレン階層の ω_1 に相当するレベルと同型であることが示される。これにより、零次元空間だけでなく、たとえばユークリッド空間などのような任意の完備可分距離空間上のボレル可測関数の構造もまた、可算整礎森の準同型順序の超限ヴェブレン階層化と

いう構造を持つことを導く。この結果は、Proc. Amer. Math. Soc. (2022) に出版された。

1c) Louveau の分離定理のベター擬順序値関数への拡張を、指導学生の笹木健太氏と共同で達成した。このための道具として、Wadge 次数をある種の代数的言語の項として表現するシンタックス的手法を整備した。この言語は、クラスカルの木の定理の無限化を扱う言語に加えて ω_1 ベースの Veblen 関数を組み込んだ強力な言語で、非常に複雑な組合せ構造を取り扱うことができる。Louveau の分離定理は、位相的概念(太字類)を計算的概念(細字類)に変換する強力な実効化定理であるが、ただこれを関数へ拡張するだけでなく、太字関数の細字全域拡張、細字支配に関する定理などの様々な変種も証明することができた。この結果は、Arch. Math. Log. への採録が決定している。

1d) ポレル可測を超える複雑性として、余解析集合の差の階層の Wadge 次数の分析の研究を大きく発展させることができた。まず、決定性公理の仮定下で、余解析集合の下降差の階層と Wadge 階数 ω_2 の対応を述べる Kechris-Martin の定理のより構成的な別証明を与えた。さらに、余解析集合の上昇差と下降差のギャップに関する Fournier の問題に解決を与えた。このために、有限心変わり付き超算術的還元的手法を導入し、 ω_1 -最小値原理、 ω_1 -最小値原理との対応についても明らかにした。この結果をまとめた論文は国際誌に投稿し、現在、査読中である。

2. 位相的分析 / 次数スペクトル, 双対性など:

2a) 計算可能トポロジーにおいては、ポーランド空間の同相型の計算可能性(次数スペクトル)に関する様々な問題を無限次元トポロジー的アイデアを用いて解決した。特に、高次元球面の次元の学習アルゴリズムを構築し、low3 で表現可能だが、いかなる計算可能な空間とも同相にならない完備可分距離空間を発見した。この結果は Proc. of CiE 2020 に出版されている。

2b) 計算可能解析学および記述集合論で近年深く研究されている擬ポーランド空間のイデアル表現について、M. de Brecht 氏 および V. Selivanov 氏との共同研究を行った。擬ポーランド空間は、ポーランド空間だけでなく領域理論に現れるような距離化不可能空間も統一的に扱うための重要な空間概念である。

まず、擬ポーランド空間のイデアル表現における記述複雑性の分析に着手し、様々な位相的性質の ω_1 -完全性を示し、この結果は Proc. of CiE 2022 に出版されている。

2c) さらに、上記の研究者と共に、計算可能 ω_1 -連続領域の枚挙可能性に関する問題にも解決を与えた。この証明には、擬ポーランド空間のイデアル表現を深く活用している。他にも、 ω_1 -連続領域の次数スペクトルに関する様々な結果を得た。この結果をまとめた論文は国際誌に投稿し、現在、査読中である。

2d) また、一般位相における de Groot 双対に関して新機軸から切り込んだ A. Pauly 氏との共同研究も行った。当初の目的は、高階関数空間などの第二可算でない空間の計算論的振る舞い、特に次数スペクトルの分析であり、このために陰定義可能性の理論が応用可能であることを発見していた。陰定義可能性の研究は、数学基礎論におけるタルスキの真理定義不可能性に端を発するもので、特に算術の真理は算術的定義不可能であるが、その一方で、算術的「陰」定義可能であることが知られている。この概念を空間の計算論的分析に応用する過程で、「陽定義可能性」と「陰定義可能性」の空間的理解が可能であることに気づき、これを de Groot 双対の変種として捉えることが可能であることを発見した。この応用として、ハウスドルフ性とコンパクト T_1 性のある種の双対性を証明した。この結果は Proc. of CiE 2023 に出版されている。

3. 総合記述集合論, トポス理論的展開:

3a) エフェクティブ・トポス上の Lawvere-Tierney 位相(以下 LT-位相)の研究に大きな進展が見られたため、そちらにも研究の方向性の舵を切った。まず、エフェクティブ・トポス上の LT-位相を、計算可能解析学における拡張 Weihrauch 次数の観点で捉え直すことができることを明らかにした。これを利用して、LT-位相に関する Lee-van Oosten の問題すべてに解決を与えた。この結果は Trans. Amer. Math. Soc. (2023) から出版されている。

3b) 相対部分結合子代数上のアセンブリの圏のある種の完備化としてトポスを得ることができるが、相対部分結合子代数の概念が明らかに記述集合論と関わっているにも関わらず、従来研究において相対部分結合子代数と記述集合論を結びつける従来研究が存在しなかったため、記述集合論的な観点からの整備を行った。たとえば、記述集合論における ω_1 -pointclass の概念が常に相対部分結合子代数を与えることを示した。また、総合位相におけるドミナンスの概念にも注目し、表現可能 pointclass の分析も進めた。このアイデアを構成的逆数学に応用し、Lifschitz 実現可能性を拡張する一般的手法を構築した。

これを用いて、直観主義集合論 IZF 上の非構成的原理の様々な分離定理を得た。

4. 本研究の波及:

本研究では、報告者は数多くの成果を挙げているが、それだけが研究成果ではない。そこから世界中の研究者へと広がっていった波及的成果が極めて重要である。つまり、報告者が分解可能性予想とマーティン予想の双方の研究において業績を挙げつつ、これら二大予想を結び付けるプロジェクトを立ち上げたという点が重要であった。報告者に追随した数多くの研究者がこのプロジェクトに関わり、この二大予想の新機軸からの研究に取り組んだ。

報告者と Carroy による Solecki ダイコトミーがマーティン予想と結び付くというアイデアに基づき、Lutz-Siskind は保測写像および順序保存写像に対する第一マーティン予想の解決を与えた。この業績により、Lutz は Sacks 賞を受賞した。

分解可能性予想における、計算可能性理論における優先法の重要性を報告者は指摘していたが、このアイデアに基づき、Day-Marks は Δ_1^2 -決定性公理の下で、分解可能性予想の解決を与えた。Marks は、この結果を含めた記述集合論における数多くの業績を挙げており、国際数学者会議 ICM 2022 の招待講演者に選ばれている。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計13件（うち査読付論文 13件 / うち国際共著 9件 / うちオープンアクセス 3件）

1. 著者名 de Brecht Matthew, Kihara Takayuki, Selivanov Victor	4. 巻 13359
2. 論文標題 Enumerating Classes of Effective Quasi-Polish Spaces	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Lecture Notes in Computer Science	6. 最初と最後の頁 88 ~ 102
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-3-031-08740-0_8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Kihara Takayuki	4. 巻 252
2. 論文標題 Topological reducibilities for discontinuous functions and their structures	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Israel Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 461 ~ 500
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s11856-022-2367-6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Kihara Takayuki, Selivanov Victor	4. 巻 150
2. 論文標題 Wadge-like degrees of Borel bco-valued functions	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Proceedings of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 3989 ~ 4003
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/proc/15930	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Kihara Takayuki, Pauly Arno	4. 巻 10
2. 論文標題 Point Degree Spectra of Represented Spaces	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Forum of Mathematics, Sigma	6. 最初と最後の頁 1 ~ 27
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/fms.2022.7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Kihara Takayuki	4. 巻 10
2. 論文標題 Lawvere-Tierney topologies for computability theorists	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Transactions of the American Mathematical Society, Series B	6. 最初と最後の頁 48 ~ 85
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/btran/134	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 D' AURIAC PAUL-ELLIOT ANGLES, KIHARA TAKAYUKI	4. 巻 86
2. 論文標題 A COMPARISON OF VARIOUS ANALYTIC CHOICE PRINCIPLES	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 The Journal of Symbolic Logic	6. 最初と最後の頁 1452 ~ 1485
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/jsl.2021.37	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Iljazovic Zvonko, Kihara Takayuki	4. 巻 1
2. 論文標題 Computability of Subsets of Metric Spaces	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 In: Brattka V., Hertling P. (eds) Handbook of Computability and Complexity in Analysis, Theory and Applications of Computability (In cooperation with the association Computability in Europe). Springer	6. 最初と最後の頁 29 ~ 69
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-3-030-59234-9_2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Gregoriades Vassilios, Kihara Takayuki, Ng Keng Meng	4. 巻 21
2. 論文標題 Turing degrees in Polish spaces and decomposability of Borel functions	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Logic	6. 最初と最後の頁 1 ~ 41
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/S021906132050021X	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Ding Longyun, Kihara Takayuki, Semmes Brian, Zhao Jiafei	4. 巻 85
2. 論文標題 Decomposing functions of Baire class 2 on Polish spaces	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 The Journal of Symbolic Logic	6. 最初と最後の頁 960 ~ 971
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/jsl.2020.57	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Kihara Takayuki	4. 巻 8
2. 論文標題 The Brouwer invariance theorems in reverse mathematics	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Forum of Mathematics, Sigma	6. 最初と最後の頁 1-12
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/fms.2020.52	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Hoyrup Mathieu, Kihara Takayuki, Selivanov Victor	4. 巻 12098
2. 論文標題 Degrees of non-computability of homeomorphism types of Polish spaces	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Lecture Notes in Computer Science	6. 最初と最後の頁 189 ~ 192
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-3-030-51466-2_16	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Takayuki Kihara	4. 巻 84
2. 論文標題 On a metric generalization of the tt-degrees and effective dimension theory	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 The Journal of Symbolic Logic	6. 最初と最後の頁 726-749
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/jsl.2019.18	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Takayuki Kihara, Alberto Marcone, and Arno Pauly	4. 巻 -
2. 論文標題 Searching for an analogue of ATR_0 in the Weihrauch lattice	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 The Journal of Symbolic Logic	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計19件 (うち招待講演 9件 / うち国際学会 14件)

1. 発表者名 Takayuki Kihara
2. 発表標題 Weihrauch reducibility on multi-represented spaces
3. 学会等名 International Conference on Computability, Complexity, and Randomness 2022 (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 木原貴行
2. 発表標題 Turing 次数から実効トポス上の Lawvere-Tierney 位相へ
3. 学会等名 Symposium on Advances in Mathematical Logic 2022 (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Takayuki Kihara
2. 発表標題 Computability Theory and Reverse Mathematics via Lawvere-Tierney topologies
3. 学会等名 The 18th conference on Computability in Europe: Revolutions and Revelations in Computability (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Takayuki Kihara
2. 発表標題 Recent development on the Wadge degrees of Borel functions
3. 学会等名 Fourth Workshop on Digitalization and Computable Models (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 木原貴行
2. 発表標題 計算可能数学のトポスとLawvere-Tierney位相
3. 学会等名 証明論シンポジウム2022
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 木原貴行
2. 発表標題 計算可能数学のトポスとLawvere-Tierney位相
3. 学会等名 第8回山陰基礎論と数学およびその周辺の研究集会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 木原貴行
2. 発表標題 構成的逆数学とLawvere-Tierney位相
3. 学会等名 数理論理学と構成的数学に関するワークショップ
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Takayuki Kihara
2. 発表標題 HYP with finite mind-changes
3. 学会等名 Oberwolfach Workshop on Computability Theory (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Takayuki Kihara
2. 発表標題 Lawvere-Tierney topologies for computability theorists
3. 学会等名 Third Workshop on Digitalization and Computable Models (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 木原貴行
2. 発表標題 計算可能性と定義可能性による階層構造 / この10年で何が起きたか
3. 学会等名 2021年度 日本数学会 秋季総合分科会 (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Takayuki Kihara
2. 発表標題 Lawvere-Tierney topologies for computability theorists
3. 学会等名 CCC2021: Continuity, Computability, Constructivity From Logic to Algorithms (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Takayuki Kihara
2. 発表標題 Computability theory and reverse mathematics via Lawvere-Tierney topologies
3. 学会等名 Algorithmic Presentations in Mathematics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Takayuki Kihara
2. 発表標題 New directions in synthetic descriptive set theory
3. 学会等名 Dagstuhl Seminar on Descriptive Set Theory and Computable Topology (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Takayuki Kihara
2. 発表標題 Lawvere-Tierney topologies for computability theorists, an introduction
3. 学会等名 The second Japan-Russia workshop on effective descriptive set theory, computable analysis and automata (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Takayuki Kihara
2. 発表標題 Degrees of non-computability of homeomorphism types of Polish spaces
3. 学会等名 Computability in Europe 2020, Beyond the horizon of computability (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Takayuki Kihara
2. 発表標題 Around the Wadge rank 2
3. 学会等名 Japan-Russia Workshop on Effective Descriptive Set Theory, Computable Analysis and Automata (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Takayuki Kihara
2. 発表標題 Some Lifschitz-like realizability notions separating non-constructive principles
3. 学会等名 Fourth Workshop on Mathematical Logic and its Applications (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Takayuki Kihara
2. 発表標題 Computability theoretic methods in descriptive set theory
3. 学会等名 The Sixteenth Asian Logic Conference (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Takayuki Kihara
2. 発表標題 BQO-Wadge degrees on nonseparable ultrametric spaces and computability on uncountable cardinals
3. 学会等名 Higher Recursion Theory and Set Theory (国際学会)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

研究代表者のウェブページ（論文・研究発表の情報など）

<http://www.math.mi.i.nagoya-u.ac.jp/~kihara/index-j.html>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
ロシア連邦	A.P. Ershov Institute			
フランス	INRIA, LORIA			
ロシア連邦	A.P. Ershov Institute of IS, RAS			