

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 5 年 6 月 26 日現在

機関番号：32613

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2019～2022

課題番号：19K03608

研究課題名(和文)量子古典対応および量子カオスの観点に基づくグラフの増大列の解析とその応用

研究課題名(英文) Analysis of growing sequences of graphs in terms of quantum-classical correspondence and quantum chaos, and its applications

研究代表者

齋藤 正顕 (Saito, Seiken)

工学院大学・教育推進機構(公私立大学の部局等)・准教授

研究者番号：90525164

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：(1)正則グラフの non-backtracking path の個数を成分にもつ行列に関するモーメントの極限が逆正弦則のモーメントと類似するという定理を得た。(2)Lubotzky-Phillips-Sarnak ラマヌジャングラフに関する重さ2の cusp form の素数冪フーリエ係数の平均に関する結果を得た。(3)一般化Kesten 分布のモーメントと一般化カタラン数の等式を得た。(4)正則グラフのレゾルベントに現れる行列の成分の主要項を除いた誤差項の分布を決定した。その応用として、グラフの増大列が固有値に関するある条件を満たすときに、誤差項の極限分布は正規分布となることが得られた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

ラマヌジャングラフなどに代表される効率のよいネットワークの特徴づけとして、グラフ上の量子エルゴード定理や量子カオスに注目した研究を行った。量子カオスは、ラプラシアン固有関数の挙動に関する現象である。ラプラシアン固有関数のふるまいを調べる基礎として、我々は、正則グラフの隣接行列のレゾルベントに現れる幾何的な量に着目し、その非自明な部分の分布について決定した。また、巨大な正則グラフの隣接行列の固有値の分布などの例に現れるケステン分布の一般化について、そのモーメントに関する新しい等式などが得られた。この結果は、上記のグラフの幾何的な量にも関係する。

研究成果の概要(英文)：(1) We obtained a limit theorem that the moments for matrices whose components are the number of non-backtracking paths in a regular graph is similar to the moment of the arcsin law. (2) We obtained a result on the average of the prime power Fourier coefficients of the cusp forms of weight 2 related to the Lubotzky-Phillips-Sarnak Ramanujan graphs. (3) We gave explicit expressions for the moments of the generalized Kesten distribution. We obtained identities for the moments in two generalizations of the classical Catalan numbers. (4) We studied the resolvent of the adjacency matrix of a regular graph and the matrix related to the number of non-backtracking paths. As an application, we obtained that the limiting distribution of the error term is normally distributed when a growing sequence of regular graphs satisfies certain conditions on the eigenvalues.

研究分野：グラフ理論

キーワード：正則グラフ ラマヌジャングラフ グラフの増大列 グラフ上の量子カオス 伊原ゼータ関数 フーリエ係数

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

ラマヌジャングラフの無限列や、ランダム正則グラフの無限列など、正則木に収束するグラフの増大列は、グラフ理論のみならず情報通信分野などの応用上でも重要な研究対象である。最近の研究では、これらの良いグラフの増大列は「量子エルゴード定理のグラフ類似」をみたとする新しい特徴づけがなされている[1,3]。これは、元来、リーマン曲面上の量子カオス現象に端を発する。リーマン面をビリヤード台にして、ビリヤードをした場合に、リーマン面がエルゴード的であるとき、球の軌道が不規則(カオス的)になる。これは、リーマン多様体に関する量子エルゴード定理(Shnirelman 74, Zelditch 87, Colin de Verdiere 85)といわれる。2015年に量子エルゴード定理のグラフ理論的類似が Anantharaman と Le Masson によって証明された。しかし、多様体とグラフの場合の量子エルゴード定理には大きな違いがある。多様体の場合は、そのラプラシアン固有値を無限大にする(つまりプランク定数を0に近づける)という極限によって量子から古典に移行するのに対し、グラフの場合は無限正則木に収束するような正則グラフの増大列の極限をとることで量子から古典に移行する。どのような正則グラフの増大列が量子エルゴード定理を満たすかということについて、Anantharamanらの定理では、増大列がエキスパンダーであること、及び Benjamini-Schramm[4]の意味で無限正則木に収束するという2つの条件を課している。例えば、ラマヌジャングラフの無限列として最初に構成された Lubotzky-Phillips-Sarnak のラマヌジャングラフの増大列[5]は、この2条件をみたすエルゴード的なグラフである。その極限をとったときに、グラフに付随して定義されるさまざまな量(グラフのゼータ関数、non-backtracking paths の個数など)の挙動を解析することはグラフ上の量子カオスの観点から重要な問題と考えられる。一方、多様体の量子カオスについては、物理学者の M.V. Berry がラプラシアンの固有関数の値がランダムであるという所謂 random wave 予想[2]を提唱している。これは量子カオス現象の精密化の観点からも非常に興味深い。Anantharamanらのグラフに関する量子エルゴード定理の観点から、本研究ではグラフ版の random wave 予想がどのように定式化されるかという問題も併せて考えることにした。

2. 研究の目的

本研究では、グラフの増大列について、頂点の個数を無限大に飛ばした極限として得られる無限グラフを、そのグラフ列の半古典極限であると考え、主に次のグラフの増大列を考察する：
・正則木に収束する正則グラフの列(Ramanujan グラフ、ランダム正則グラフの無限列など)。
・無限格子に収束するグラフの被覆列(有限グラフの最大アーベル被覆で得られる格子など)。
これらのグラフの増大列について、上述の学術的な問いに基づき次の課題に取り組む：
(課題1) 増大列の隣接行列の固有ベクトルの成分の極限分布(グラフ版 Berry 予想)。
(課題2) 増大列の隣接固有値の極限分布(Kesten-McKay 分布)の Serre による一般化(精密化)の量子確率論的解釈とその拡張。
(課題3) 増大列の特徴量や関係式(complexity あるいは Selberg trace formula)の極限。
(課題4) 増大列のグラフのゼータ関数とテータ関数の対応(Hecke 対応の類似)とその極限。

3. 研究の方法

正則グラフ上では、多様体の場合と同じく調和解析を用いることができる。グラフのラプラシアンの固有関数の挙動を調べるために、そのレゾルベントについて調べた。レゾルベントを幾何的な量で表すとグラフ上の non-backtracking paths の個数と関係する行列が現れる。この行列を隣接行列で明示的に表すことで、グラフを増大させたときのレゾルベントの挙動をつかむことができる。この行列を固有値の観点から自明な行列と非自明な行列の和に分解し、非自明な行列の「分布」について調べる。得られた結果の応用として、決定論的なエルゴード的グラフ列の例として、数論的な観点からもよく知られている Lubotzky-Phillips-Sarnak のラマヌジャングラフの増大列の場合に限定して考察することで新しい知見が得られないか試した。関連して、正則グラフの増大列の隣接行列の固有値分布を解析する方法として、量子確率論がある。我々は、量子確率論でも扱われる巨大な正則グラフの固有値分布の一般化である Kesten 分布についても、そのモーメント列の組合せ論的性質について調べた。特殊な場合は無限正則木上のランダムウォークの再起確率と関係する。代表者と分担者間で、対面とオンラインの研究打ち合わせを行った。固有関数の挙動を理解するために数式処理ソフトを用いて巨大な正則グラフ(LPS ラマヌジャングラフなど)の固有関数を計算した。研究期間の途中から COVID-19 の感染拡大により対面の打ち合わせはできなくなってしまったが、研究集会やセミナーで発表することで意見をもらい結果を改良し、論文を投稿することができた。

4. 研究成果

- (1)正則グラフの non-backtracking path の個数を成分にもつ行列に関する「モーメント」の (path の長さに関する) 極限が逆正弦則のモーメントと類似していること. (2)上記の行列が隣接行列の第 1 種チェビシェフ多項式で書けること. (3)(2)に関連して第 2 種チェビシェフ多項式と隣接行列で書ける行列の「モーメント」の極限も逆正弦則のモーメントと類似していること. (4)上記の応用として Lubotzky-Phillips-Sarnak のラマヌジャングラフに関する重さ 2 の cusp form の p べきフーリエ係数の平均に関する結果を得た. 上記 (1) ~ (4) の結果は以下の論文として出版された: Takehiro Hasegawa, Takashi Komatsu, Norio Konno, Hayato Saigo, Seiken Saito, Iwao Sato, Shingo Sugiyama, The Limit Theorem with Respect to the Matrices on Non-backtracking Paths of a Graph, *Annals of Combinatorics* (2022 年 11 月 15 日オンライン出版). これらは (課題 1,2,3) と関連する.
- 我々は, 2 つのパラメータをもつ形に一般化された Kesten 分布のモーメントについて, 組合せ論的な明示式を与えた. 我々はモーメントを古典的なカタラン数の 2 通りの一般化 (Catalan's triangle または Shapiro's Catalan triangle) で表す等式を得た. 関連して Eplett (*Discrete Math.* 25 (1979)) による Catalan 数と Shapiro's Catalan triangle の関係式の一般化を得た. また, 応用として, Kesten 分布の $2k$ 次モーメントの次数 $2k$ が発散するときの漸近式を得た. この漸近式の特別な場合として, ベーテ格子(無限正則木)上の閉路の個数の漸近式を得ることができる. これは, Sawyer (1978) が得たベーテ格子上の離散時間対称ランダムウォークで時刻 $2k$ に戻ってくる確率の k が発散するときの漸近式の主要項の係数 (Theorem 2 の定数 C) を明示的に決定したことになる (参照: S. Sawyer, Isotropic random walks in a tree, *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* 42 (1978), no. 4, 279-292.). 結果は以下の論文として出版された. T. Hasegawa and S. Saito, A note on the moments of the Kesten distribution, *Discrete Mathematics* 344(10), Paper No.112524, 10 pp. これらは (課題 2,3) と関連する.
- 正則グラフの隣接行列のレゾルベントに現れる non-backtracking path の個数と関係する行列の成分の主要項を除いた誤差項の (path の長さに関する) 分布を決定した. その応用として, グラフの増大列が固有値に関するある条件を満たすときに, 誤差項の極限分布は正規分布となることが得られた (これはある種の中心極限定理的な現象と考えられるが, 固有値の間には代数関係があるので単純ではない). またサイクルグラフの場合から確率密度関数の等式が得られた. 結果は論文投稿に向けて準備中である. これらは (課題 1,3) と関連する.

参考文献

- [1] N. Anantharaman and E. Le Masson, *Duke Math. J.* 164, no. 4 (2015), 723-765.
- [2] M. V. Berry, *J. Phys. A*, 10 (1977), 2083-2091.
- [3] S. Brooks and E. Lindenstrauss, *Israel J. Math.* 193 (2013), 1-14.
- [4] I. Benjamini and O. Schramm, *Electron. J. Probab.* 6 (2001), no. 23, 13 pp.
- [5] A. Lubotzky, R. Phillips, P. Sarnak, *Combinatorica* 8 (1988), no. 3, 261-277.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 6件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 4件）

1. 著者名 Hasegawa Takehiro, Komatsu Takashi, Konno Norio, Saigo Hayato, Saito Seiken, Sato Iwao, Sugiyama Shingo	4. 巻 Published online:15 Nov. 2022
2. 論文標題 The Limit Theorem with Respect to the Matrices on Non-backtracking Paths of a Graph	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Annals of Combinatorics	6. 最初と最後の頁 20pages
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00026-022-00617-z	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Hasegawa Takehiro, Saito Seiken	4. 巻 344
2. 論文標題 A note on the moments of the Kesten distribution	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Discrete Mathematics	6. 最初と最後の頁 112524 ~ 112524
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.disc.2021.112524	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Saigo Hayato	4. 巻 13
2. 論文標題 Category Algebras and States on Categories	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Symmetry	6. 最初と最後の頁 1172 ~ 1172
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3390/sym13071172	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Saigo Hayato, Nohmi Juzo	4. 巻 13
2. 論文標題 Categorical Nonstandard Analysis	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Symmetry	6. 最初と最後の頁 1573 ~ 1573
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3390/sym13091573	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Saigo Hayato	4. 巻 13
2. 論文標題 Quantum Fields as Category Algebras	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Symmetry	6. 最初と最後の頁 1727 ~ 1727
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3390/sym13091727	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Misa Hamano and Hayato Saigo	4. 巻 315
2. 論文標題 Quantum Walk and Dressed Photon	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science	6. 最初と最後の頁 93-99
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4204/EPTCS.315.9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

〔学会発表〕 計6件 (うち招待講演 3件 / うち国際学会 1件)

1. 発表者名 齋藤正顕
2. 発表標題 正則グラフにおけるnon-backtracking cycle の個数の誤差項
3. 学会等名 第37回代数的組合せ論シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 齋藤正顕
2. 発表標題 正則グラフにおけるnon-backtracking cycle の個数の誤差項の分布
3. 学会等名 日本数学会2022年度年会 (埼玉大学) 応用数学科分会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 杉山慎吾
2. 発表標題 グラフ上の後戻りのない道の個数の非可換化と極限定理
3. 学会等名 ラマヌジャン・グラフの整数論による耐量子計算機暗号へのアプローチ(九州大学IMI共同利用・短期共同研究 非公開講演会), 九州大学 (ZOOM開催に変更) (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Hayato Saigo
2. 発表標題 Quantum Fields as Category Algebras
3. 学会等名 Mathematical aspects of quantum fields and related topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 齋藤正顕
2. 発表標題 グラフのセルバーグ跡公式について
3. 学会等名 第93回米沢数学セミナー 『可換Banach 環と関連分野研究集会』
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 齋藤正顕
2. 発表標題 Ramanujan グラフの non-backtracking paths の個数の分布に関する数値実験
3. 学会等名 第4回 軽井沢グラフと解析研究集会
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	長谷川 武博 (Hasegawa Takehiro) (80409614)	滋賀大学・教育学系・教授 (14201)	
研究分担者	西郷 甲矢人 (Saigo Hayato) (80615154)	長浜バイオ大学・バイオサイエンス学部・教授 (34204)	
研究分担者	杉山 真吾 (Sugiyama Shingo) (70821817)	日本大学・理工学部・助手 (32665)	
研究分担者	谷口 哲也 (Taniguchi Tetsuya) (90625500)	金沢工業大学・基礎教育部・准教授 (33302)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------