

令和 5 年 6 月 25 日現在

機関番号：52101

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2019～2022

課題番号：19K03610

研究課題名(和文) 指定要素を含む閉路が存在するための、次数条件によるグラフの構造解析

研究課題名(英文) Structural analysis of graphs by degree conditions to the existence of cycles including specified elements

研究代表者

弘畑 和秀 (Hirohata, Kazuhide)

茨城工業高等専門学校・国際創造工学科・教授

研究者番号：30321392

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,400,000円

研究成果の概要(和文)：グラフ理論の中で非常に重要な概念にグラフの閉路があり、古くからすべての頂点を通る閉路、すなわちハミルトン閉路の存在や閉路の長さに関する研究が行われてきた。本研究では従来の閉路に関する研究をさらに発展させ、複数個の閉路の存在性や、任意の頂点や辺などを指定し、それらを含む閉路に関する研究を行う。研究期間内の成果としては、点素な弦付き閉路に関する研究や任意に指定した頂点や辺を通る弦付き全閉路的グラフに関する研究において成果を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

閉路によるグラフの分割問題は、グラフの因子問題(与えられたグラフに対して、ある特定の性質を満たす全域部分グラフの存在を示す問題)とも密接な関係があり、本研究で得られた結果を発展させ因子問題研究を行うことができる。また、閉路が弦を持つとき、偶数の長さを持つ閉路(偶閉路)の存在を示すことができ、グラフの構造がより明らかとなる。

研究成果の概要(英文)：In Graph Theory, the studies of cycles are very important, and there have been studies regarding a Hamiltonian cycle which visits each vertex exactly once, and the length of cycles for a long time. In this study, we develop the former studies of cycles, and study the existence of multiple cycles, and cycles including any specified elements such as vertices or edges.

In study duration, we obtained results on vertex-disjoint chorded cycles and chorded pancyclic graphs with any specified vertex or edge.

研究分野：Graph Theory

キーワード：Discrete Mathematics Graph Theory cycle chord chorded cycle vertex-disjoint cycles minimum degree sum pancyclic graph

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

1963年、Corradi と Hajnal は、グラフの点素な閉路に関して「グラフ  $G$  は頂点数が  $3k$  以上で最小次数が  $2k$  以上であるとき、 $G$  には  $k$  個の点素な閉路が存在する」を証明した。この定理の次数条件は 1989年、Justesen によって「非隣接 2 頂点の最小次数和が  $4k$  以上」に改良され、さらに Enomoto(1998年)と Wang(1999年)によって異なる証明法で「最小次数和が  $4k-1$  以上」へと最小次数和に関して最良の結果に改良された。本研究においては、以上の結果をもとにグラフの構造解析をさらに進めたいと考え、次数条件のさらなる改良や指定要素を含む閉路に関する研究を行う。

### 2. 研究の目的

本研究では従来の閉路に関する研究をさらに発展させ、複数個の閉路の存在性や、任意の頂点や辺などを指定し、それらを含む閉路に関する研究を行い、与えられた次数条件下でのグラフの構造をより明らかにすることを研究の目的とする。

### 3. 研究の方法

(1) 2008年、Finkel はグラフに  $k$  個の点素な弦付き閉路が存在するための最小次数条件を与えた。ここで、閉路上の非連続な 2 頂点を結ぶ辺を「弦」といい、弦をもつ閉路を「弦付き閉路」という。本研究ではどの 2 頂点も隣接していない頂点の集合である「独立頂点集合」を考えることにより、次数条件に改良を加え、Finkel の結果を拡張する。まず辺極大なグラフ  $G$  を考える。このとき、 $G$  には  $k-1$  個の点素な弦付き閉路  $C_1, C_2, \dots, C_{k-1}$  が存在し、これらの閉路によって構成される部分グラフで頂点数が最小の  $L$  を選ぶ。ここで、 $H=G-L$  とする。次に  $H$  はある程度多くの頂点をもち、 $H$  にはハミルトン道(すべての頂点を通る道)が存在することを示す。これらの事実をもとに、 $G$  には  $k$  個の点素な弦付き閉路が存在することを証明する。

(2) 次数条件の観点から指定要素を含む弦付き全閉路的グラフの存在に関する研究を行った。ここで、指定要素として「頂点」を考える。閉路を構成している辺の数を閉路の「長さ」といい、 $G$  をグラフとし、 $G$  の頂点数を  $n$  とする。グラフが弦付き全閉路的であるとは、4 以上  $n$  以下のすべての長さをもつ弦付き閉路が存在することである。本研究では長さの短い弦付き閉路の存在を証明することが容易ではなく、そのため、以下のようなグラフの頂点分割を考える。ここで、任意に指定する  $G$  の頂点を  $x$  とする。頂点  $x$  に非隣接な頂点(例えば  $y$  とする)を考え、 $x$  と  $y$  を除く  $G$  の頂点集合を、 $x$  及び  $y$  との隣接関係からいくつかに分類し、これらの各頂点集合で構成されるグラフの構造やそれらのグラフ間の構造を解析する。

(3) 次数条件の観点から指定された要素を含む  $k$  個の点素な閉路に関する研究を行った。点素な閉路の存在を証明する方法として、辺極大なグラフを考えることが有効である。辺極大なグラフ( $G$  とする)とは、 $G$  における任意の非隣接 2 頂点を辺で結ぶと所望の点素な閉路が存在するグラフのことである。従って、 $G$  には  $k-1$  個の点素な閉路  $C_1, C_2, \dots, C_{k-1}$  (これらをまとめて  $L$  とする)が存在することになり、頂点数の合計が最も小さくなる  $L$  を選ぶ。今、 $G$  から  $L$  を除いてできるグラフを  $H$  とし、 $L$  と  $H$  がどのように辺で繋がっているのかを調べるなどして、閉路の取り換えを行い、より頂点数の少ないグラフ  $L'$  を構成し矛盾を導く。

### 4. 研究成果

(1) 2008年、Finkel は頂点数が  $4k$  以上で最小次数が  $3k$  以上のグラフには、 $k$  個の点素な弦付き閉路が存在することを証明した。2010年、Chiba らは Finkel の次数条件を「非隣接な 2 頂点の最小次数和( $6k-1$  以上)」としても同様の結果が成り立つことを証明した。本研究においては、これらの結果を独立頂点集合の概念を考えることにより拡張を行った。すなわち、3 頂点からなる独立頂点集合の最小次数和、さらにこれを一般化し、 $t$  頂点からなる独立頂点集合の最小次数和を考えることで、 $k$  個の点素な弦付き閉路が存在することを証明した。本研究はグラフの因子問題(ある特定の性質を満たす全域部分グラフの存在を示す問題)とも密接な関係があり、本研究をさらに発展させていきたい。

(2)  $G$  をグラフとし、 $G$  の頂点数を  $n$  とする。1971年、Bondy は「非隣接な 2 頂点の最小次数和が  $n$  以上であるグラフ  $G$  は、ある特定の完全 2 部グラフを除き全閉路的グラフである」という

結果を証明した。ここで「全閉路的グラフ」とは、3以上  $n$  以下のすべての長さの閉路をもつグラフのことである。2017年、Creamらは Bondy の結果を弦付き全閉路的グラフに拡張し、完全2部グラフ以外にも例外となるグラフが存在することを証明した。本研究においては、これらの結果の更なる拡張を目指し、どのようなグラフが指定要素を含む弦付き全閉路的グラフとなり、どのようなグラフが例外となるのかに関する結果を得た。先行研究の次数条件を維持したまま指定要素を含む閉路の存在を示すことにより、従来の結果よりもグラフの構造をより明らかにすることができる。今後は、各閉路の長さに関する条件を弱め、同様の研究を行いたいと考えている。

(3) 指定要素を含む点素な閉路に関する研究を行った。ここで、 $G$  をグラフとし、 $G$  の頂点数を  $n$  ( $n$  は十分大きな値) とする。指定要素として  $k$  個の頂点を指定した場合、 $G$  の最小次数が  $n/2$  以上であれば、 $G$  には指定した  $k$  個の頂点をそれぞれ含む点素な閉路によるグラフの頂点分割が存在することが知られている。この結果をもとに、本研究においては、どのようなときに複数の指定要素を含む点素な閉路が存在するのか、次数条件及び関連する結果を得た。本研究はグラフの因子問題とも深く関連しており、本研究をさらに発展させていきたい。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件/うち国際共著 2件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Ronald J. Gould, Kazuhide Hirohata, Ariel Keller Rorabaugh	4. 巻 77(3)
2. 論文標題 On independent triples and vertex-disjoint chorded cycles in graphs	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Australasian Journal of Combinatorics	6. 最初と最後の頁 355-372
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

1. 著者名 Bradley Elliott, Ronald J. Gould, Kazuhide Hirohata	4. 巻 36(6)
2. 論文標題 On degree sum conditions and vertex-disjoint chorded cycles	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Graphs and Combinatorics	6. 最初と最後の頁 1927-1945
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00373-020-02227-z	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計5件（うち招待講演 0件/うち国際学会 0件）

1. 発表者名 Kazuhide Hirohata, Bradley Elliott, Ronald J. Gould
2. 発表標題 Degree sum conditions for the existence of vertex-disjoint chorded cycles in a graph
3. 学会等名 日本数学会年会 応用数学科分会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Kazuhide Hirohata, Bradley Elliott, Ronald J. Gould
2. 発表標題 Vertex-disjoint chorded cycles and degree sum conditions
3. 学会等名 応用数学会合同研究集会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Kazuhide Hirohata, Ronald J. Gould, Ariel K. Rorabaugh
2. 発表標題 Vertex-disjoint chorded cycles and degree sum conditions
3. 学会等名 日本数学会 秋季総合分科会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Kazuhide Hirohata, Ronald J. Gould, Ariel K. Rorabaugh
2. 発表標題 Vertex-disjoint chorded cycles and degree sum conditions
3. 学会等名 Japanese Conference on Combinatorics and its Applications 2021
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Kazuhide Hirohata, Ronald J. Gould, Ariel Keller Rorabaugh
2. 発表標題 Vertex-disjoint chorded cycles and degree sum condition
3. 学会等名 日本数学会 秋季総合分科会
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	グールド ロナルド  (Gould Ronald)		

6. 研究組織（つづき）

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	ロラボー アリエル  (Rorabaugh Ariel)		
研究協力者	エリオット ブラッドリー  (Elliott Bradley)		

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関		
米国	エモリー大学	テネシー大学	ケンタッキー大学