

令和 6 年 5 月 29 日現在

機関番号：35302

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2019～2023

課題番号：19K03617

研究課題名（和文）シュレーディンガー方程式および波動方程式の非線形性同定逆問題の研究

研究課題名（英文）Inverse problems for Schroedinger equations and wave equations

研究代表者

渡邊 道之（Watanabe, Michiyuki）

岡山理科大学・理学部・教授

研究者番号：90374181

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,200,000円

研究成果の概要（和文）：量子力学における逆散乱問題および非線形性の同定に関する逆問題の数学的研究において重要な進展を遂げました。最終年度では、ハートリー近似法と高エネルギーボルン近似法を空間2次元の場合に適用する新手法を開発し、研究期間全体を通じては、非線形波動方程式および非線形シュレーディンガー方程式に対する新しい解析手法を確立しました。これらの成果は、圧電体の利用技術や原子構造の解明に寄与するだけでなく、今後の数学的研究の発展にも大きな影響を与えると期待されます。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究の成果は、圧電体の利用技術の進展や原子構造の解明に寄与する可能性があります。例えば、ライターやコンロ、ソナーやスピーカーなどの技術における圧電体の応用に役立つだけでなく、原子構造の解明においても新たな知見を提供することが期待されます。特に、ハートリー・ホック近似法と高エネルギーボルン近似法を組み合わせた新しい考え方は、従来の手法では困難だった問題の解決に寄与し、量子力学における逆散乱問題の理解を深める重要なステップとなりました。今後は、より多様な数値モデルに対してこれらの手法を検証し、応用範囲を広げる予定です。

研究成果の概要（英文）：Important progress was made in the mathematical study of inverse scattering problems in quantum mechanics and inverse problems for the identification of nonlinearities. In the final year, new methods were developed to apply the Hartree and high-energy Born approximation methods to the two-dimensional case in space, and throughout the entire research period, new analytical methods were established for the nonlinear wave equation and the nonlinear Schroedinger equation. These results are expected not only to contribute to the elucidation of piezoelectric application techniques and atomic structure, but also to have a significant impact on the future development of mathematical research.

研究分野：数学

キーワード：逆問題 散乱理論

## 1. 研究開始当初の背景

逆問題とは、直接観測できない原因を観測された現象(結果)から推定する問題である。医学、物理学における逆問題は、例えば物体の内部画像を構成する問題(CTやMRI)や散乱粒子から原子・分子の配列構造に依存するポテンシャルを決定する問題がある。これらの問題は偏微分方程式を用いて定式化することができ、求めようとしている未知の物理的特性は方程式の係数などに表れる。逆問題の数学解析では、偏微分方程式の未知係数などを境界や無限遠における解の挙動から決定することが課題となる。偏微分方程式の逆問題において、数学の学術的「問い」とは、未知係数から解の遠方または境界での値の集合への対応(非線形写像)の性質を調べること、具体的にはその写像の単射性、連続性、表現公式、値域の特徴づけを明らかにすることである。実用化に向けた数値解法の開発には、表現公式の解析的な構成手続き(再構成手続き)を与えることが重要となる。

ところで、現実の物理現象の多くは非線形であり、そのモデル方程式は必然的に非線形偏微分方程式となる。例えば、隕石などの超音速で移動する物体の周囲に発生する衝撃波や、津波または雷、オーロラなどのプラズマ(物質の第4の状態)中にみられる孤立波(ソリトン)など、自然現象の中に多く見られるこれらの波動現象は、非線形波動と呼ばれている。その発生のメカニズム解明の研究は、工学および物理学分野における実験による研究だけでなく、数学による理論研究、すなわち非線形波動を記述する非線形偏微分方程式の解の構造研究など多岐にわたり広がりを見せている。

一方で、隕石落下から生じた衝撃波や地震で発生した津波などの計測データから、未知物質または未知媒質の特性(隕石の元となる小惑星の大きさや質量および軌道、地球の内部構造など)を推定する逆問題も重要な研究課題である。その中でも特に、未知物質の特性を計測データから具体的に構成する再構成手続きを与えることが応用上あるいは実用上最も重要である。対応する数学の理論研究では、方程式の解の遠方または境界での挙動から、方程式の未知係数および未知非線形項を求める再構成手続きを与えることが課題となる。この問題を、**偏微分方程式の逆問題**と呼ぶ。これに対し、微分方程式の解の構造(一意性、存在、安定性、漸近挙動など)の問題を**順問題**と呼ぶ。非線形波動の数学研究は、これまで順問題が主流であった。一方、逆問題の数学研究は線形偏微分方程式を支配方程式とする取り組みが主流であった。非線形偏微分方程式の逆問題ははまだ揺籃期にあるといつてよい。

本研究では、多くの非線形波動現象の中でもとくに非線形音響の逆問題への応用に焦点をあてる。医療現場で使われている超音波検査(エコー)は、超音波を対象物に当て散乱エコー波から対象物を映像化する逆散乱問題である。実は、不均一性の著しい生態媒質での非線形伝搬とその逆問題は理論的にまだ研究段階であり、十分に解明されていない。

## 2. 研究の目的

不均一性の著しい生態媒質での非線形伝搬とその逆問題を理論的に解明するための数学の基礎理論を構築し、非線形音響の逆問題への応用の基盤を築くことを大きな目的とする。この目的を達成するために、本研究では、非線形波動を記述する基礎方程式としてのNLS方程式とNLW方程式に対して、未知非線形項から方程式の解のデータの集合(散乱データ、または境界データ)への写像(非線形写像)の単射性、連続性、表現公式、値域の特徴づけを明らかにすること、これらの中でも特に表現公式の解析的な構成手続き(再構成手続き)を与えることを研究目的とす

る。

### 3. 研究の方法

未知非線形項から NLS 方程式の散乱解のデータの集合への写像を**散乱写像**と呼ぶ。本研究では、主に NLS 方程式と NLW 方程式の散乱写像の性質（単射性、連続性、表現公式、値域の特徴づけ）を、次の3段階で解析する：

- (1) 非線形散乱理論と散乱データの漸近解析の計算手法を用いる
- (2) 未知非線形項と既知の散乱データに関する函数方程式（たいていの場合積分方程式となる）を導く
- (3) その方程式の可解性を超関数の理論と積分幾何の理論および積分方程式論を用いて解析し、未知非線形項の再構成手続きを与える

なお、再構成手続きが与えられれば、単射性、連続性を示すことができ、値域の特徴づけを与える基礎となる。また、(1)における漸近解析の誤差評価を、実解析の不等式に関するテクニックを用いて精密な評価も与える。

### 4. 研究成果

非線形性を観測データから同定する逆問題の数学的研究に取り組み、以下の具体的な成果を得た。

- (1) 非線形波動方程式の解の低振幅展開法の開発: この手法を用いて、非線形波動方程式の解をより正確に解析することが可能となった。
- (2) 非線形シュレーディンガー方程式に対する高エネルギーボルン近似法の適用: この新しい手法により、非線形シュレーディンガー方程式の解の解析が進展し、非線形性の再構成において従来よりも高い精度で再構成公式の導出が可能となった。

これらの成果は、圧電体の利用技術の進展や原子構造の解明に寄与する可能性がある。例えば、ライター、ソナー、スピーカーなどの技術における圧電体の応用に役立つだけでなく、原子構造の解明においても新たな知見を提供することが期待される。今後は、より多様な数理モデルに対してこれらの手法を検証し、応用範囲を広げる予定である。

本研究は、量子力学における逆散乱問題および非線形性の同定に関する逆問題の数学的研究において重要な進展を遂げた。特に最終年度では、ハートリー近似法と高エネルギーボルン近似法を空間2次元の場合に適用する新手法を開発し、研究期間全体を通じては、非線形波動方程式および非線形シュレーディンガー方程式の逆問題に対する新しい解析手法を確立した。これらの成果は、圧電体の利用技術や原子構造の解明に寄与するだけでなく、医療現場で使われている超音波検査（エコー）への応用、さらには今後の数学的研究の発展にも大きな影響を与えると期待される。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 5件／うち国際共著 0件／うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Isozaki Hiroshi, Kadowaki Mitsuteru, Watanabe Michiyuki	4. 巻 46
2. 論文標題 Asymptotic behavior of stationary solutions to elastic wave equations in a perturbed half space in $\mathbb{R}^3$	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Mathematical Methods in the Applied Sciences	6. 最初と最後の頁 16318 ~ 16380
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1002/mma.9452	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 渡邊道之	4. 巻 59
2. 論文標題 Inverse Scattering Problems for Restricted Hartree Equations in Spatial Two-Dimensions	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 岡山理科大学紀要. A, 自然科学	6. 最初と最後の頁 1-5
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Michiyuki Watanabe	4. 巻 15
2. 論文標題 Inverse N-body scattering with the time-dependent Hartree-Fock approximation	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Inverse Problems and Imaging	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3934/ipi.2021002	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Gen Nakamura, Manmohan Vashisth and Michiyuki Watanabe	4. 巻 37
2. 論文標題 Inverse initial boundary value problem for a non-linear hyperbolic partial differential equation	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Inverse Problems	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1088/1361-6420/abcd27	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hiroshi Isozaki, Mitsuteru Kadowaki and Michiyuki Watanabe	4. 巻 43
2. 論文標題 Uniform asymptotic profiles of stationary wave propagation in perturbed two-layered media	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Mathematical Methods in the Applied Sciences	6. 最初と最後の頁 2789-2835
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1002/ma.5945	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Michiyuki Watanabe	4. 巻 60
2. 論文標題 Time-dependent methods in inverse scattering problems for the Hartree-Fock equation	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 91504
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1063/1.5090924	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計1件 (うち招待講演 1件 / うち国際学会 0件)

1. 発表者名 渡邊道之
2. 発表標題 Inverse N-body scattering with the time-dependent Hartree-Fock approximation
3. 学会等名 日本数学会 (招待講演)
4. 発表年 2023年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------