

令和 5 年 5 月 10 日現在

機関番号：15201

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2019～2022

課題番号：19K03620

研究課題名(和文) 準凸最適化問題に対する双対理論を用いた緩和問題とその同値性について

研究課題名(英文) On relaxation problems for quasiconvex optimization in terms of duality theory

研究代表者

鈴木 聡 (Suzuki, Satoshi)

島根大学・学術研究院理工学系・准教授

研究者番号：70580489

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,700,000円

研究成果の概要(和文)：準凸最適化問題は経済学等の問題を最も適切に数理モデル化できる手法の一つである。緩和は問題を解きやすい形に帰着して解決する手法であるが、準凸最適化においては未解決課題が多く残されている。本研究の目的は、緩和問題に関する研究の一つとして、準凸最適化問題に対する双対理論を用いた緩和問題とその同値性に必要な条件を提案することである。

研究期間全体を通じて、最適性条件と制約想定、集合関数に対する双対定理、制約想定の特徴付け、準凸最適化問題に対するKKT最適性条件、準凸最適化問題の線形緩和、劣微分を用いた最適性条件、共役関数を用いた双対問題などについて研究を行った。

研究成果の学術的意義や社会的意義

研究期間全体を通じて、準凸最適化問題に対する緩和問題及び最適性条件に関する研究を行った。これらは問題を制約のない問題や不動点問題などの解きやすい形に帰着して解決するための手法であり、種々のアルゴリズムを用いた問題解決を可能とするためのものである。特に準凸最適化問題の線形計画緩和は、準凸最適化問題を線形計画問題に帰着するものであり、単体法や内点法などのアルゴリズムを用いた問題解決が可能になる。また、本研究は解きやすい準凸最適化問題の特徴はどのようなものが、といった問いに答えるものともなっている。

研究成果の概要(英文)：Quasiconvex optimization problem is one of the most suitable mathematical models for real problems such as economics. Relaxation is a technique that solves problems by reducing them to an easy-to-solve form, but there are unsolved problems in quasiconvex optimization.

The purpose of this research is to propose a relaxation problem using duality theory for quasiconvex optimization problems and study necessary conditions for its equivalence. We study optimality conditions and constraint qualifications, duality theorems for set functions, characterizations of constraint qualifications, KKT optimality conditions for quasiconvex optimization, linear relaxations for quasiconvex optimization, optimality conditions in terms of subdifferentials, and dual problems in terms of conjugate functions.

研究分野：最適化理論

キーワード：最適化問題 準凸最適化問題 応用数学 凸解析

1. 研究開始当初の背景

最適化問題とは、与えられた制約条件の下で目的関数の最小値とそれを与える点を求めよという問題である。各種の環境下で費用を最小に、又は利益を最大にするような計画を立てる場合、これをモデル化し最適化問題として捉えることにより、迅速に効果の高い決定を行うことができる。

最適化問題の研究において根幹を成すものとして緩和手法の研究がある。Lagrange 双対性や surrogate 双対性のように、主問題よりも解きやすい問題を導出し最適値の下界を得ることが主な目的である。また理論的には、主問題と緩和問題が同値になるための条件は何かという学術的「問い」に関する研究が古くから行われてきた。これらの研究は線形あるいは凸最適化においては世界的に研究が進んでいる一方で、準凸最適化に関する理論研究はほとんど進んでいなかった。準凸最適化は経済学等の実用上の多くの問題を最適化問題として扱うことのできる重要な研究対象であり、緩和手法に関する研究は喫緊の課題となっていた。

2. 研究の目的

本研究の目的は、主問題と緩和問題が同値になるための条件は何かという理論的「問い」に答えることを目的に、準凸最適化問題に対する双対理論を用いた緩和問題とその同値性についての研究を行うことである。準凸最適化の緩和問題として

- ・準凸最適化問題に対する線形計画緩和
- ・準凸最適化問題に対する共役関数を用いた緩和問題
- ・集合関数に対する surrogate 双対性

等に関する研究を行う。

3. 研究の方法

関連分野の論文・書籍からの情報収集、凸解析学等の数学的手法を用いた理論的な解析、コンピュータを用いた実例の観察、口頭発表及び論文投稿による成果発表、関連分野の研究者との共同研究・意見交換といったサイクルを絶やすことなく行う。特に成果発表・共同研究を積極的に行い、最新の情報や新たな着想を得て研究の発展に繋げる。

4. 研究成果

研究期間全体を通じた研究成果として

- ・生成集合による線形計画緩和とその同値性
- ・双対定理とその必要十分な制約想定
- ・最適性条件とその制約想定

等がある。得られた結果は国内外の関連研究者から評価の高い各種学術雑誌に投稿・掲載されており、多くの引用を得ている。今後も同様の研究を継続することで更なる発展が期待できる。

以下に各年度に行った研究成果の詳細について述べる。

(令和元年度)

当初計画どおり、準凸最適化問題に対する緩和問題と最適性条件について研究をおこなった。具体的には

1. 準凸最適化問題に対する最適性条件と制約想定
2. 集合関数に対する surrogate 双対定理
3. 凸及び準凸集合関数に対する双対定理

の提案を行った。

1 について、具体的には二種類の劣微分と準凸関数の生成集合を用いて KKT 最適性条件を示した。またこれに対する制約想定について研究し、必要十分となる制約想定を示した。これらの制約想定は元来準凸最適化問題に対する Lagrange 型双対定理の制約想定として提案されたものであり、この結果により Lagrange 型双対定理と KKT 最適性条件の同値性に関する結果を得ることができた。

2 について、通常最適化問題において定義域は「ベクトルの集合」であるが「集合の族」を定義域として持つような集合関数を考え、これを目的関数とするような最適化問題を考察した。この問題に対する緩和問題として surrogate 双対定理を示し、またこれに対する制約想定を提案

した。この研究は韓国・釜慶大学の G.M.Lee 教授との共同研究である。

3 について、より簡便な形で集合関数を定義し、これに対する性質や双対定理に関する研究を行った。具体的には Lagrange 双対定理と surrogate 双対定理を示し、主問題と緩和問題が同値になるための条件を示した。

(令和 2 年度)

非線形最適化における制約想定と最適性条件に関する研究を行った。具体的には

1. BCQ の特徴付けとその応用
2. 準凸最適化問題に対する GP 劣微分を用いた KKT 最適性条件に関する研究を行った。

1 について、BCQ とは凸最適化問題における Lagrange 型双対定理の制約想定であるが、この制約想定が成り立つかどうか確認するためには、定義域の各点における法線錐や劣微分を計算する必要があり場合によっては非常に困難になることがある。そこで本研究では、各点における計算を行うことなく、制約関数の共役を用いて定義域全体で制約想定が成り立つかどうか確認することのできる特徴付けを示した。

2 について、KKT 最適性条件とは Lagrange の未定乗数法としても知られる問題解決において非常に重要な条件である。本研究では準凸最適化問題に対して GP 劣微分と呼ばれる劣微分の一つを用いて KKT 最適性条件を示している。またこれに対する二種の制約想定も示した。この条件は最適性の必要十分条件であり、準凸最適化においてはこれまでこのような必要十分条件はあまり示されていなかったため、国内外から大きな注目を集めている。

(令和 3 年度)

準凸最適化問題に対する緩和問題と最適性条件について研究をおこなった。具体的には

1. 準凸最適化問題に対する線形計画緩和
2. 準凸最適化問題に対する劣微分と最適性条件に関する研究を行った。

1 について、準凸関数の生成集合を用いて準凸最適化問題に対する線形計画緩和問題を提案し、主問題と緩和問題が同値となるための条件を示した。この緩和問題は無限個の制約を持つことがありうるため、通常の線形計画問題に対するアルゴリズムは有効ではない場合もあるが、緩和問題が有限制約しか持たないための条件も示し、これによって「解きやすい問題に帰着できる準凸最適化問題はどのようなものか」という問いに関して一定の解答を与えた。

2 について、準凸最適化問題に対する 2 種類のイプシロン劣微分を提案し、近似解に対する最適性条件を示した。一般的な最適化問題においては厳密解を効率的に求めることが難しい場合が多く、近似解を求める解法の研究が盛んである。この論文では特に近似解に対する最適性の必要十分条件を示したほか、近似解全体の集合に対する特徴付けを示している。

(令和 4 年度)

準凸最適化問題に対する緩和問題について研究をおこなった。具体的には

1. 準凸最適化問題に対する共役関数を用いた緩和問題に関する研究を行った。

1 について、準凸関数に対する共役関数は様々なものが提案されているが、ここでは Q 共役と呼ばれる共役関数を用いた双対問題を示した。主問題と双対問題が同値となるための条件を示したほか、「双対問題の双対問題」の研究を通じて、主問題と双対問題がどのような関係にあるかについて詳細な考察を行った。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計11件（うち査読付論文 9件 / うち国際共著 1件 / うちオープンアクセス 11件）

1. 著者名 Satoshi Suzuki	4. 巻 7
2. 論文標題 -subdifferentials and optimality conditions for quasiconvex programming	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Linear and Nonlinear Analysis	6. 最初と最後の頁 185-197
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Satoshi Suzuki	4. 巻 22
2. 論文標題 Linear Programming Relaxation for Quasiconvex Programming	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Nonlinear and Convex Analysis	6. 最初と最後の頁 1251-1261
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Satoshi Suzuki	4. 巻 2190
2. 論文標題 準凸計画問題に対するKKT条件と制約想定	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 88-94
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Suzuki Satoshi	4. 巻 79
2. 論文標題 Karush-Kuhn-Tucker type optimality condition for quasiconvex programming in terms of Greenberg-Pierskalla subdifferential	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Global Optimization	6. 最初と最後の頁 191 ~ 202
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s10898-020-00926-8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Daishi Kuroiwa, Satoshi Suzuki and Shunsuke Yamamoto	4. 巻 11
2. 論文標題 Characterizations of the basic constraint qualification and its applications	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Nonlinear Analysis and Optimization	6. 最初と最後の頁 99 ~ 109
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Satoshi Suzuki	4. 巻 183
2. 論文標題 Optimality Conditions and Constraint Qualifications for Quasiconvex Programming	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 J. Optim. Theory Appl.	6. 最初と最後の頁 963-976
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10957-019-01534-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Daishi Kuroiwa, Gue Myung Lee, and Satoshi Suzuki	4. 巻 5
2. 論文標題 Surrogate duality for optimization problems involving set functions	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Linear Nonlinear Anal.	6. 最初と最後の頁 269-277
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Satoshi Suzuki	4. 巻 1
2. 論文標題 Optimality conditions for quasiconvex programming with a reverse quasiconvex constraint	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Proceedings of the 10th Anniversary Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis	6. 最初と最後の頁 303-310
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Satoshi Suzuki and Daishi Kuroiwa	4. 巻 1
2. 論文標題 Duality theorems for convex and quasiconvex set functions	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 SN Operations Research Forum	6. 最初と最後の頁 1-13
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s43069-020-0005-x	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Satoshi Suzuki and Daishi Kuroiwa	4. 巻 2112
2. 論文標題 準凸計画問題に対する劣微分を用いた最適性条件	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 154-159
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Satoshi Suzuki	4. 巻 23
2. 論文標題 Conjugate dual problem for quasiconvex programming	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 J. Nonlinear Convex Anal.	6. 最初と最後の頁 879-889
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

[学会発表] 計3件 (うち招待講演 0件 / うち国際学会 0件)

1. 発表者名 Satoshi Suzuki
2. 発表標題 準凸計画問題に対するKKT最適性条件
3. 学会等名 日本数学会2021年度秋季総合分科会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 鈴木 聡
2. 発表標題 準凸計画問題に対する最適性条件と制約想定
3. 学会等名 日本数学会2021年度年会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Satoshi Suzuki
2. 発表標題 Optimality conditions and constraint qualifications for quasiconvex programming
3. 学会等名 非線形解析学と凸解析学の研究
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

https://www.math.shimane-u.ac.jp/~suzuki https://www.staffsearch.shimane-u.ac.jp/kenkyu/search/ddc356628b0a7d52fbc451b0de34860d/detail?page=research https://ir.lib.shimane-u.ac.jp/en/list/shimane_creators/S/98cef94ee1b4c0482edd9ed34c3e9b56

6. 研究組織		
氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
ルーマニア	Babes-Bolyai University			
韓国	釜慶大大学校			