

令和 6 年 6 月 12 日現在

機関番号：32619

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2019～2023

課題番号：19K03624

研究課題名（和文）Max-plus代数上の線形計算アルゴリズムの開発とその応用

研究課題名（英文）Development of linear solvers on max-plus algebra and its applications

研究代表者

福田 亜希子（Fukuda, Akiko）

芝浦工業大学・システム理工学部・教授

研究者番号：70609297

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,400,000円

研究成果の概要（和文）：(1) I型超離散ハングリー戸田方程式およびI型超離散ハングリーロトカ・ボルテラ系の有限回の時間発展によって、min-plus代数における帯行列の固有値が計算できることを明らかにした。I型超離散ハングリー戸田方程式は多重のバブルソートを同時に行っていると解釈でき、収束高速化のための発展方程式を得た。(2) 箱と玉の両方に番号がついた箱玉系の保存量を導出し、ハングリー -BBSとの関係を明らかにした。(3) 量子ウォークのmax-plus類似として、max-plusウォークを導入した。相関付きランダムウォークを基に拡張型の離散パーガース方程式が得られ、超離散化することで新たな交通流モデルを導出した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

これまで主に連続系や離散系で議論されてきた可積分アルゴリズムに関する理論を超離散系に拡充したことで、他の可積分アルゴリズム研究の今後の新たな展開が期待される。本研究で新たに得られたアルゴリズムはmin-plus代数上のアルゴリズムとして解釈されるが、min-plus/max-plus代数はスケジューリング問題や制御理論、離散事象システムなどへの応用が知られている。今後の実用化を目指したアルゴリズムの開発・改良により、これらの応用分野にとっても有益となり得る。

研究成果の概要（英文）：(1) It is shown that eigenvalues for banded matrices over the min-plus algebra can be computed by the ultradiscrete hungry Toda equation of type I and the ultradiscrete hungry Lotka-Volterra system of type I. The ultradiscrete hungry Toda equation of type I can be interpreted as performing multiple bubble sort simultaneously. The evolution equation for convergence acceleration is obtained.(2) Conserved quantities for the box and ball system with numbered boxes and balls are derived, and the relationship with the hungry -BBS is also clarified.(3) The max-plus walk is introduced as a max-plus analogue of the quantum walk. An extended discrete Burgers equation was obtained based on the correlated random walk, and a new traffic flow model was derived by ultradiscretization.

研究分野：応用数学，可積分系，数値解析

キーワード：超離散可積分系 min-plus代数 max-plus代数 固有値 箱玉系 グラフ理論 交通流モデル 超離散化

様式 C - 19、F - 19 - 1 (共通)

1. 研究開始当初の背景

代表的な可積分系である連続時間戸田格子と数値計算法である QR アルゴリズムとの関係を Symes が指摘したことを契機に、離散可積分系と数値計算アルゴリズムの漸化式との等価性に関する研究が行われてきた。特に、離散時間戸田方程式と関連が深い固有値計算のための QR 法や qd 法は、現代においてもその改良版が標準的に用いられている。さらには、離散可積分系を基に新たな数値計算アルゴリズムの開発も行われ、可積分系の数理解構を有する高速・高精度な数値計算アルゴリズムが定式化されてきた。一方で、差分方程式に対して、変数変換と極限操作によって区分線形な方程式を得る超離散化と呼ばれる手法が提案された。箱と玉で構成される力学系である箱玉系の運動方程式は、離散戸田方程式の超離散化と一致することが知られている。さらに、箱玉系の収束加速版はソーティングアルゴリズムのバブルソートとみなすことができる。

研究代表者らのこれまで研究において、離散ハングリー戸田方程式や離散ハングリーロトカ・ボルテラ系などの離散可積分系から、非対称帯行列に対する固有値計算アルゴリズムを定式化しており、可積分系特有の性質から、アルゴリズムの数理的な解析が可能となっている。さらに、それらの可積分系の超離散版と対応する一般化された箱玉系が定義され、その解析も行っている。一方、Min-plus 代数とは、実数の集合に負の無限大を加えた集合において、和と積をそれぞれ \min と $+$ で定義した代数系である。超離散戸田方程式は min-plus 代数上の方程式とみなすことができ、超離散戸田方程式が min-plus 代数上の行列の固有値を求めることが可能であることが、研究代表者らによって指摘されていた。

2. 研究の目的

これまで主に連続系および離散系で議論されていた可積分系の数理解構をもつ数値計算アルゴリズムの枠組みを超離散系まで広げる。具体的には、超離散ハングリー戸田方程式、超離散ロトカ・ボルテラ系などを対象とし、離散系で定式化されている固有値計算アルゴリズムの min-plus 代数版の構築を目指す。さらには、関連する箱玉系や超離散系に関する理論の拡充も併せて検討する。

3. 研究の方法

離散ハングリー戸田方程式や離散ハングリーロトカ・ボルテラ系に基づいて定式化された帯行列に対する固有値計算アルゴリズムを起点に、方程式およびアルゴリズムのレベルでの超離散化を行い、min-plus 代数における固有値計算アルゴリズムに関する検討を行う。数理的な解析手法としては、超離散方程式自体の解析に加えて、min-plus 代数上の行列の固有値と関連が深いグラフ理論的なアプローチについても検討する。

4. 研究成果

- (1) I 型超離散ハングリー戸田方程式は、玉に番号を付けて区別した番号付き箱玉系の運動方程式と一致することが知られていた。番号付き箱玉系の保存量と収束性の解析から、I 型超離散ハングリー戸田方程式の有限回の時間発展によって、min-plus 代数上における上 Hessenberg 行列の固有値を計算できることを明らかにした。さらに、I 型超離散ハングリー戸田方程式は多重のバブルソートを同時に行っていると解釈でき、ソーティングを高速

化するための発展方程式を得た。これにより, min-plus 代数上の固有値計算の高速化への応用も可能となる。

- (2) I 型超離散ハングリー-ロトカ・ボルテラ系について, 一般の任意パラメータをもつ場合の漸近挙動や保存量を明らかにし, その時間発展によって, min-plus 代数上の帯行列の固有値が計算できることを示した。さらに, (1)の I 型超離散ハングリー-戸田方程式との行列レベルでの対応についても明らかとなった。さらに, グラフ上の最短経路問題を解くダイクストラ法について, 古典的な線形計算アルゴリズムである Kaczmarz 法の超離散化に対応することも部分的に明らかとなっている。
- (3) 量子ウォークの max-plus 類似として, max-plus ウォークを導入し, その性質を明らかにした。Max-plus ウォークの時間発展後の状態を陽的に構成することに成功し, Max-plus ウォークの定常状態や極限分布について議論した。さらに, ランダムウォークを拡張した相関付きランダムウォークに対し, コール・ホップ変換によって拡張型の離散バーガス方程式を得ている。この拡張型離散バーガス方程式を超離散化することにより, 拡張型の超離散バーガス方程式が得られ, 初期値を整数値に制限することで, 新たな交通流モデルを導出し, 密度と流量の関係を表す基本図の解析を行った。
- (4) I 型および II 型の超離散ハングリー-戸田方程式はそれぞれ玉もしくは箱に番号をつけて区別した拡張された箱玉系と対応するが, 本研究では, 箱と玉の両方に番号がついた箱玉系を導入し, その運動方程式が拡張型離散ハングリー-戸田方程式の超離散化によって得られることが示された。また, 組合せ論的手法を用いて, 新たな箱玉系の保存量を導出し, ハングリー -BBS との関係についても明らかにした。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計14件（うち査読付論文 12件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 8件）

1. 著者名 Kan Masafumi, Fukuda Akiko, Watanabe Sennosuke	4. 巻 30
2. 論文標題 Ultradiscrete hungry Toda equation and eigenvalues over min-plus algebra	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Journal of Difference Equations and Applications	6. 最初と最後の頁 233 ~ 251
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1080/10236198.2023.2277714	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Yusaku Yamamoto, Akiko Fukuda, Emiko Ishiwata, Masashi Iwasaki	4. 巻 B94
2. 論文標題 Box and ball system with numbered boxes and balls	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 RIMS Kokyuroku Bessatsu	6. 最初と最後の頁 21-36
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Fukuda Akiko, Segawa Etsuo, Watanabe Sennosuke	4. 巻 29
2. 論文標題 Generalized discrete and ultradiscrete Burgers equations derived through the correlated random walk	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Journal of Difference Equations and Applications	6. 最初と最後の頁 84 ~ 101
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1080/10236198.2023.2172969	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Nishida Yuki, Watanabe Sennosuke, Fukuda Akiko, Yanagisawa Daichi	4. 巻 14
2. 論文標題 Fuzzy cellular automata with complete number-conserving rule as traffic-flow models with bottleneck	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 JSIAM Letters	6. 最初と最後の頁 143 ~ 146
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.14495/jsiaml.14.143	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Shinjo Masato, Fukuda Akiko, Kondo Koichi, Yamamoto Yusaku, Ishiwata Emiko, Iwasaki Masashi, Nakamura Yoshimasa	4. 巻 439
2. 論文標題 Discrete hungry integrable systems - 40 years from the Physica D paper by W.W. Symes	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Physica D: Nonlinear Phenomena	6. 最初と最後の頁 133422 ~ 133422
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.physd.2022.133422	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Yamamoto Yusaku, Fukuda Akiko, Kakizaki Sonomi, Ishiwata Emiko, Iwasaki Masashi, Nakamura Yoshimasa	4. 巻 25
2. 論文標題 Box and Ball System with Numbered Boxes	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Mathematical Physics, Analysis and Geometry	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s11040-022-09425-6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Nishida Yuki, Watanabe Sennosuke, Fukuda Akiko, Watanabe Yoshihide	4. 巻 2641
2. 論文標題 Traffic flow models with two kinds of vehicles in terms of the vector-valued cellular automata and their fuzzification	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 AIP Conference Proceedings	6. 最初と最後の頁 20006
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1063/5.0114966	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Fukuda Akiko, Yamamoto Yusaku, Iwasaki Masashi, Ishiwata Emiko, Nakamura Yoshimasa	4. 巻 65
2. 論文標題 Convergence acceleration of shifted SLR transformations for totally nonnegative Hessenberg matrices	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Applications of Mathematics	6. 最初と最後の頁 677 ~ 702
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.21136/AM.2020.0378-19	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 福田 亜希子、渡邊 扇之介、瀬川 悦生	4. 巻 42
2. 論文標題 相関付きランダムウォークから導かれる連続・離散・超離散方程式	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 津田塾大学 数学・計算機科学研究所所報	6. 最初と最後の頁 45-56
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yuki Nishida, Sennosuke Watanabe, Yoshihide Watanabe	4. 巻 65
2. 論文標題 On the vectors associated with the roots of max-plus characteristic polynomials	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Applications of Mathematics	6. 最初と最後の頁 785-805
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.21136/AM.2020.0374-19	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yuki Nishida, Sennosuke Watanabe, Yoshihide Watanabe	4. 巻 601
2. 論文標題 A characterization of bases of tropical kernels in terms of Cramer's rule	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Linear Algebra and its Applications	6. 最初と最後の頁 301~310
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.laa.2020.05.018	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Sennosuke Watanabe, Akiko Fukuda, Etsuo Segawa, Iwao Sato	4. 巻 -
2. 論文標題 Limit theorem of the max-plus walk	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 RIMS Kokyuroku Bessatsu	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Watanabe Sennosuke, Fukuda Akiko, Segawa Etsuo, Sato Iwao	4. 巻 598
2. 論文標題 A walk on max-plus algebra	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Linear Algebra and its Applications	6. 最初と最後の頁 29--48
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.laa.2020.03.025	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Fukuda Akiko, Watanabe Sennosuke, Hanaoka Ayumi, Iwasaki Masashi	4. 巻 1218
2. 論文標題 Ultradiscrete Lotka-Volterra system computes tropical eigenvalue of symmetric tridiagonal matrices	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Physics: Conference Series	6. 最初と最後の頁 012015 ~ 012015
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1088/1742-6596/1218/1/012015	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

〔学会発表〕 計19件 (うち招待講演 2件 / うち国際学会 3件)

1. 発表者名 齋藤 元気, 福田 亜希子, 渡邊 扇之介
2. 発表標題 超離散ハングリーロトカ・ボルテラ系と超離散ハングリー戸田方程式を用いたmin-plus代数上の固有値計算
3. 学会等名 日本応用数理学会2022年度年会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Yuki Nishida, Sennosuke Watanabe, Akiko Fukuda, Yoshihide Watanabe
2. 発表標題 Traffic flow models with two kinds of vehicles in terms of the vector-valued cellular automata and their fuzzification
3. 学会等名 International Conference on Mathematics: Pure, Applied and Computation (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 齋藤元気, 福田 亜希子, 渡邊扇之介
2. 発表標題 超離散ハングリーロトカ・ボルテラ系を用いたmax-plus代数上の帯行列の固有値計算
3. 学会等名 第19回 計算数学研究会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 福田 亜希子
2. 発表標題 超離散可積分系と min-plus 代数上の固有値計算
3. 学会等名 スペクトラルグラフ理論および周辺領域 第10回 研究集会(招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 西山 智也, 福田 亜希子
2. 発表標題 Kaczmarz法の超離散化とmin-plus代数におけるダイクストラ法との対応
3. 学会等名 日本応用数理学会2021年度年会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 渡邊 扇之介, 福田 亜希子, 瀬川 悦生
2. 発表標題 相関付きランダムウォークから導かれる超離散パーガースセルオートマトン
3. 学会等名 日本応用数理学会 第17回研究部会連合発表会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 西山 智也, 福田 亜希子
2. 発表標題 Randomized Kaczmarz法の超離散化とselective dioidにおけるダイクストラ法との対応
3. 学会等名 第18回計算数学研究会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 菅 雅文, 福田 亜希子
2. 発表標題 番号付き箱玉系におけるソーティングの条件と高速化
3. 学会等名 第18回計算数学研究会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 福田 亜希子, 瀬川 悦生, 渡邊 扇之介
2. 発表標題 相関付きランダムウォークから導かれる連続・離散・超離散方程式
3. 学会等名 津田塾大学 数学計算機科学研究所 オンライン研究集会 非線形波動から可積分系へ (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 菅 雅文, 福田 亜希子
2. 発表標題 番号付き箱玉系のソーティング条件
3. 学会等名 津田塾大学 数学計算機科学研究所 オンライン研究集会 非線形波動から可積分系へ
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Akiko Fukuda, Sennosuke Watanabe, Masafumi Kan
2. 発表標題 Computation of min-plus eigenvalues via ultradiscrete integrable systems
3. 学会等名 International Conference on Matrix Analysis and its Applications (MATRIAD 2019) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Akiko Fukuda, Sennosuke Watanabe, Masafumi Kan
2. 発表標題 A min-plus analogue of the qd algorithm and its generalization
3. 学会等名 The 9th International Congress on Industrial and Applied Mathematics (ICIAM 2019) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 瀬川 悦生, 福田 亜希子, 渡邊 扇之介
2. 発表標題 量子ウォーク・相関付きランダムウォーク・超離散化
3. 学会等名 第17回 計算数学研究会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 渡邊 扇之介, 福田 亜希子, 瀬川 悦生, 佐藤 巖
2. 発表標題 量子ウォークのmax-plus類似とその極限分布
3. 学会等名 第17回 計算数学研究会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 菅 雅文, 福田 亜希子, 渡邊 扇之介
2. 発表標題 超離散ハングリー戸田方程式によるmin-plus代数上の固有値計算
3. 学会等名 第17回 計算数学研究会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 渡邊 扇之介, 福田 亜希子, 瀬川 悦生, 佐藤 巖
2. 発表標題 量子ウォークのmax-plus類似とその性質
3. 学会等名 令和元年度 九大応力研共同利用研究集会 非線形波動研究の多様性
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 菅 雅文, 福田 亜希子, 渡邊 扇之介
2. 発表標題 超離散ハングリー戸田方程式によるmin-plus代数上の固有値計算
3. 学会等名 令和元年度 九大応力研共同利用研究集会 非線形波動研究の多様性
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 渡邊 扇之介, 福田 亜希子, 瀬川 悦生, 佐藤 巖
2. 発表標題 Max-plusウォーク ~超離散版量子ウォークの構築~
3. 学会等名 RIMS共同研究(公開型)可積分系数理の深化と展開
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 渡邊 扇之介, 福田 亜希子, 瀬川 悦生, 佐藤 巖
2. 発表標題 超離散量子ウォークの保存量と定常状態
3. 学会等名 日本応用数学会 2019年度 年会
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 Bernd Heidergott, Geert Jan Olsder, Jacob van der Woude, 五島 洋行, 福田 亜希子, 渡邊 扇之介	4. 発行年 2022年
2. 出版社 森北出版	5. 総ページ数 280
3. 書名 max-plus代数とその応用	

〔産業財産権〕

〔その他〕

Akiko Fukuda's Homepage https://www.mathsci.shibaura-it.ac.jp/afukuda/
--

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	渡邊 扇之介 (Watanabe Sennosuke) (80735316)	福知山公立大学・情報学部・准教授 (24304)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------