様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

KAKENHI 科研費

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　４ 年　 ６ 月　 ９ 日現在

機関番号：１２６１２
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2019～2021
課題番号：１９Ｋ０３６３０

研究課題名（和文）非適合要素を用いた混合型有限要素法への内部ペナルティ法の適用

研究課題名（英文）Application of interior penalty methods to mixed finite element method using nonconforming elements

研究代表者
小山　大介（Koyama, Daisuke）

電気通信大学・大学院情報理工学研究科・助教

研究者番号：６０２５１７０８

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,500,000円

研究成果の概要（和文）：重調和方程式の境界値問題に対する数値解法として，本研究では，HJ法に内部ペナルティ法を適用して得られる方法(IP法)について下記の結果を得た．IP法とHJ法それぞれで得られる近似解の間の差異とIP法の誤差に対して，ペナルティ・パラメータとメッシュサイズ・パラメータによる事前評価式を導出した．
次に，IP法で生ずる連立一次方程式を解く方法として，双対問題(変位に関する連立一次方程式)にCG法を適用し，その内部反復に現れる連立一次方程式にICCG法を適用する方法を考え，その反復回数がパラメータに依存しないことを数理解析と数値実験により明らかにした．

研究成果の学術的意義や社会的意義
重調和方程式の境界値問題は板曲げの数理モデルであり，構造力学分野において重要である．そのような問題の数値解法の性質を数学的に明らかにすることには社会的意義がある．本研究で考察したIP法は，有限要素法で一番オーソドックスなラグランジュ要素を用いることができ，HJ法に比して簡便となる．IP法では，ペナルティ・パラメータをいかにとるかが問題となるが，近似解が最適な収束率を持つことを保証するためのペナルティ・パラメータのより良い選び方を与えていることに意義がある．また，IP法で生ずる連立一次方程式の解法として，その計算時間がペナルティ・パラメータの選び方に依らない解法を明らかにしたことにも意義がある．

研究成果の概要（英文）：We studied a numerical method for the boundary value problem of the biharmonic equation which is obtained by applying the interior penalty method to the HJ method. We call the numerical method the IP method. We mathematically derived a priori estimates with respect to the mesh parameter and the penalty parameter for the difference between solutions of the HJ method and of the IP method and for the error of the IP method.
As a numerical solver for the system of linear equations arising in the IP method, we consider the solver obtained by applying the CG method to the dual problem (a system of linear equations with respect to the displacement), and by applying the ICCG method to a system of linear equations appearing in the inner iteration of the CG method. Through mathematical analysis and some numerical experiments we showed that the number of iterations of the solver is independent of the penalty parameter.

研究分野：偏微分方程式の数値解析

キーワード：非適合有限要素法　内部ペナルティ法　重調和方程式　事前差異評価　事前誤差評価　正定値対称行列の条件数　CG法　ICCG法

1. 研究開始当初の背景

本研究代表者は，本研究課題申請時に，重調和問題に対する混合型有限要素法として，有名かつ有効な Herrmann–Johnson 法 (HJ 法)[7] に，内部ペナルティ法 (Interior Penalty Method) を適用して得られる方法 (IP 法と呼ぶ) について研究を行っていた．HJ 法では非適合要素を用いるため，その有限要素空間の基底関数を得るために，各三角形要素上で連立一次方程式を解く必要がある．この連立一次方程式のサイズは近似多項式の次数が上がれば大きくなるので，連立一次方程式を解くことはその次数が上がるにつれて負担が大きくなり，その非適合要素の欠点となる．特に，アダプティブメッシュ法など，計算過程でメッシュの切り直しをする場合には，その都度，その基底関数を得るために切り直された三角形要素上で連立一次方程式を解かなければならなくなり，計算時間の点で非効率になる．IP 法は通常のラグランジュ要素を用いることができるので，この欠点を解消できる．IP 法では，常にそのペナルティ・パラメータ η を選ぶかが問題となる．この問題を解決するために，IP 法の解と HJ 法の解との間の差異のペナルティ・パラメータ η とメッシュサイズ・パラメータ h に関する事前評価を導出し，この事前差異評価を用いて，IP 法の事前誤差評価が HJ 法の事前誤差評価と同じになることを保証するパラメータ η の選び方を導出していた．しかしながら，この選び方は，IP 法で用いる近似関数の次数にも依存し，その次数が大きくなるにつれ，パラメータ η を大きく選ばなくてはならないというものであった．そこで，申請当時には，その事前差異評価の最適性について解決することが最大の問題であった．この事前差異評価を導出するきっかけは，及川 [8] によるストークス問題に対する事前差異評価であった．及川の差異評価は，メッシュサイズ・パラメータ h を固定し，ペナルティ・パラメータ η だけによる評価であった．しかしながら，及川の差異評価導出方法は新たに見出された方法であり，本研究でも本質的に用いている．

このような状況のもと，申請時には，同様のことが，文献 [9, 3, 1] で研究されているポアッソン方程式や線形弾性方程式に対する非適合要素を用いた混合型有限要素法にも言えるのかという疑問も湧き，それらの問題も解決する計画であった．

2. 研究の目的

本研究課題では，申請時には，重調和方程式，ポアッソン方程式，線形弾性方程式に対して，ペナルティ・パラメータ η を無限大にした時に，それぞれに対応する非適合型有限要素を用いた混合型有限要素法の解に収束する IP 法を数理解析と数値実験により確立することを目的としていた．より具体的には，IP 法には補助未知変数を導入するハイブリッド型 (Hybrid IP 法；H-IP 法) と導入しないもの (Non-Hybrid IP 法；NH-IP 法) について考え，H-IP 法，NH-IP 法それぞれに対して，以下のようにして IP 法を確立することを目標としていた：(1) IP 法の解と非適合要素を用いた解との間の差異に対するメッシュサイズ・パラメータ h とペナルティ・パラメータ η による事前評価式を導出する．(2) 事前差異評価を用いて，IP 法の解と厳密解との間の誤差の事前評価式の導出をする．

3. 研究の方法

IP 法の解と対応する非適合要素を用いた混合型有限要素法 [4, 9, 3, 1] の解の間の事前差異評価を関数解析的手法で導出する．この差異評価と混合型有限要素法の事前誤差評価を用いて，IP 法の事前誤差評価を導出する．導出した事前差異評価や事前誤差評価が最適であるかを調べるために，適当なテスト問題に対して数値実験を行う．数値実験の結果から，事前評価が最適で無いと示唆されたら，数値実験の結果に整合するような最適性を持つ事前評価を導出できないか検討し，その導出を目指し数理解析を行う．

4. 研究成果

(1) 概要

本研究で考察している重調和問題に対する IP 法は，Huang–Huang[6] で提案された方法で，その方法に含まれる幾つかのパラメータを次の性質を持つように定めた方法である：IP 法の解が，ペナルティ・パラメータ η を無限大に近づけた時，HJ 法の解に収束する．

IP 法と HJ 法それぞれで得られる近似解の間の差異に対するペナルティ・パラメータ η とメッシュサイズ・パラメータ h による事前評価式を導出した (定理 1)．この事前差異評価と Falk–Osborn[4] によって得られている HJ 法の事前誤差評価を用いて，IP 法に対するパラメータ η と h に関する事前誤差評価を導出した (定理 2)．これにより，パラメータ η を $\eta = O(h^{-1})$ にとれば，IP 法の事前誤差評価は HJ 法の事前誤差評価と同様になることが分かった．Huang–Huang[6] では，本研究より一般化された解法について研究しているので，その解法の事前誤差評価が HJ 法の事前誤差評価と同じになるには，$\eta = O(h^{-2})$ としなくてはならないという結果を得ている．実際

の数値計算で，$\eta = O(h^{-1})$ に従って η を選べば，$\eta = O(h^{-2})$ に従って選ぶより，η を小さくすることができる．IP 法で生ずる連立一次方程式 (5) に現れる正定値対称行列 A_η の条件数は，η が大きくなるにつれて大きくなる．このことは，その条件数の η に関する評価 (命題 1) と数値実験からわかる．よって，η を小さく選ぶ方が，丸め誤差による悪影響をより受けにくくなり，有効であると言える．

IP 法で生ずる連立一次方程式 (5) を解く方法として，双対問題 (6) に CG 法を適用し，その内部反復に現れる係数行列 A_η の連立一次方程式に ICCG 法を適用する方法を考える．内部反復の ICCG 法の反復回数が η に依存しないことが数値実験を通して分かった．また，双対問題 (6) の係数行列 $\mathcal{A}_\eta := BA_\eta^{-1}B^T$ の条件数 $\mathrm{cond}(\mathcal{A}_\eta)$ の h に関する評価式を導出した (命題 2)．この評価式に現れる正定数は η にも依らないことから，$\mathrm{cond}(\mathcal{A}_\eta)$ が η に依らないことが示唆されるが，数値的にも $\mathrm{cond}(\mathcal{A}_\eta)$ は η に依らないことを観測することができた．さらに，連立一次方程式 (6) に対する CG 法の反復回数も η に依らないことも観測できた．これらのことから，本方法の計算時間は η に依らないことが分かった．

本研究で導出した IP 法と HJ 法それぞれで得られる近似解の間の差異に対する評価式はペナルティ・パラメータ η とメッシュサイズ・パラメータ h によるものであり，このような評価はこれまでに導出されておらず，インパクトがあると考える．なぜなら，IP 法に関連する事前差異評価は，これまで，文献 [2, 8] において，ストークス方程式に対して得られているのみであり，その評価は，上でも述べた通り，メッシュサイズ・パラメータ h を固定し，ペナルティ・パラメータ η だけによる評価だからである．

今後の課題としては，前述の文献 [2, 8] で考察されているストークス方程式に対する IP 法や文献 [5] の線形弾性方程式に対する IP 法，また,「研究開始当初の背景」で述べた文献 [9, 3, 1] で研究されているポアッソン方程式や線形弾性方程式に対する非適合要素を用いた混合型有限要素法に対応する IP 法などに対して，η と h による事前差異評価を導出し，さらに，その評価から新たな知見が得られるか検討することである．

以下の記述では，Einstein の総和規約を用い，導関数 $\partial u/\partial x_i$ などは $u_{,i}$ などと表すこととする．また，2 次元ベクトルと 2×2 行列それぞれを一重下線と二重下線によって表すこととする．任意の関数空間 V に対して，次のような記号を用いる：

$$[V]_s^{2\times 2} := \left\{ \underline{\underline{\tau}} = [\tau_{ij}]_{1\le i,\, j\le 2} \mid \tau_{ij} \in V \text{ and } \tau_{12} = \tau_{21} \right\}.$$

また，Lebesgue 空間，Sobolev 空間は標準的な記号で表すこととする．

(2) 重調和問題に対する IP 法

有界な凸多角形領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ において，次の重調和方程式の境界値問題の弱形式を考える：find $u \in H_0^2(\Omega)$ such that

$$\int_\Omega u_{,ij} v_{,ij} = \langle f,\, v\rangle_\Omega \quad \forall v \in H_0^2(\Omega). \tag{1}$$

ここで，$\langle\cdot,\,\cdot\rangle_\Omega$ は $H^{-2}(\Omega)$ と $H_0^2(\Omega)$ の間の duality pairing である．

次に，問題 (1) を混合型問題に書き換えることを考える．領域 Ω の (hanging node を持たない) 三角形分割 $\mathcal{T}^h$ を考え，次の関数空間を導入する：

$$\Sigma := \left[H^1(\mathcal{T}^h)\right]_s^{2\times 2}, \quad U := H_0^1(\Omega) \cap H^{3/2+\varepsilon}(\mathcal{T}^h)\ (\varepsilon > 0).$$

ここで，$H^s(\mathcal{T}^h)$ $(s \ge 0)$ は破断 Sobolev 空間である．

三角形分割 $\mathcal{T}^h$ のすべての辺からなる集合を $\mathcal{E}^h$ とする．ここで，辺は両端点を含まない線分と考える．また，Ω に含まれる辺の全体を $\mathcal{E}_\circ^h$ と書く．各 $e \in \mathcal{E}_\circ^h$ に対して，e を辺とする三角形は二つあり，K_1, K_2 と順番付けされているものとする．各 $e \in \mathcal{E}_\circ^h$ に対して，e 上の K_1 の外向き単位法線ベクトルを $\underline{n} = (n_1,\, n_2)^T$ と書き，$\underline{\underline{\tau}} \in \Sigma$ に対して，$M_{nn}(\underline{\underline{\tau}}) := \tau_{ij} n_i n_j$ とする．各 e $(\in \mathcal{E}_\circ^h)$ の上で次の量を定義する：任意の $\underline{\underline{\tau}} \in \Sigma$ と任意の $v \in U$ に対して，

$$\begin{aligned}
\left[\!\left[M_{nn}\left(\underline{\underline{\tau}}\right)\right]\!\right] &:= M_{nn}\left(\underline{\underline{\tau}}\Big|_{K_1}\right)\underline{n}^{K_1} + M_{nn}\left(\underline{\underline{\tau}}\Big|_{K_2}\right)\underline{n}^{K_2}, \\
\{\{\nabla v\}\} &:= \frac{1}{2}\left[\nabla\left(v|_{K_1}\right) + \nabla\left(v|_{K_2}\right)\right] \quad \text{on} \quad e.
\end{aligned}$$

ここで，$\underline{n}^{K_\ell} = (-1)^{\ell-1}\underline{n}$ $(\ell = 1, 2)$ である．次の双一次形式を導入する：

$$\begin{aligned} a_\eta(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{\tau}}) &:= \sum_{K\in\mathcal{T}^h} \int_K \sigma_{ij}\tau_{ij} + \eta J(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{\tau}}) \quad \forall \underline{\underline{\sigma}},\ \underline{\underline{\tau}} \in \Sigma, \\ b(\underline{\underline{\tau}}, v) &:= \sum_{K\in\mathcal{T}^h} \left[\int_K \tau_{ij,j} v_{,i} - \int_{\partial K} M_{nt}(\underline{\underline{\tau}}) \frac{\partial v}{\partial t} \right] - \sum_{e\in\mathcal{E}^h_\circ} \int_e \left[\!\left[M_{nn}(\underline{\underline{\tau}}) \right]\!\right] \cdot \{\{\nabla v\}\}. \end{aligned}$$

ここで，各 $K \in \mathcal{T}^h$ に対して，境界 ∂K 上の外向き単位法線ベクトルを $\underline{n} = (n_1, n_2)^T$ とする時，単位接線ベクトルを $\underline{t} = (t_1, t_2)^T := (n_2, -n_1)^T$ とし，$M_{nt}(\underline{\underline{\tau}}) := \tau_{ij} n_i t_j$ と定義する．また，

$$J(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{\tau}}) := \sum_{e\in\mathcal{E}^h_\circ} |e| \left\langle \left[\!\left[M_{nn}\left(\underline{\underline{\sigma}}\right) \right]\!\right], \left[\!\left[M_{nn}\left(\underline{\underline{\tau}}\right) \right]\!\right] \right\rangle_e \quad \forall \underline{\underline{\sigma}},\ \underline{\underline{\tau}} \in \Sigma.$$

ここで，$\langle \cdot, \cdot \rangle_e$ は $[L^2(e)]^2$ の通常の内積であり，η (≥ 0) はペナルティ・パラメータである．

次の混合型問題を考える：find $\left\{\underline{\underline{\sigma}}, u\right\} \in \Sigma \times U$ such that

$$a_\eta(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{\tau}}) + b(\underline{\underline{\tau}}, u) = 0 \quad \forall \underline{\underline{\tau}} \in \Sigma, \tag{2a}$$

$$b(\underline{\underline{\sigma}}, v) = -\langle f, v \rangle_\Omega \quad \forall v \in U. \tag{2b}$$

問題 (1) の解を $u \in H^2_0(\Omega)$ とし，$\sigma_{ij} := u_{,ij}$ $(i, j = 1, 2)$ とすると，$\left\{\underline{\underline{\sigma}}, u\right\} \in \Sigma \times U$ は問題 (2) の解となる．

自然数 k を固定して，次のような有限要素空間を考える：

$$\Sigma^h := \left\{ \underline{\underline{\tau}}^h \in \Sigma \mid \underline{\underline{\tau}}^h|_K \in [P_{k-1}(K)]^{2\times 2}_s \ \ \forall K \in \mathcal{T}^h \right\}, \quad U^h := \left\{ v^h \in H^1_0(\Omega) \mid v^h|_K \in P_k(K)\ \forall K \in \mathcal{T}^h \right\}.$$

次の離散近似問題を考える：find $\underline{\underline{\sigma_\eta^h}} \in \Sigma^h$ and $u^h_\eta \in U^h$ satisfying

$$a_\eta(\underline{\underline{\sigma_\eta^h}}, \underline{\underline{\tau}}^h) + b(\underline{\underline{\tau}}^h, u^h_\eta) = 0 \quad \forall \underline{\underline{\tau}}^h \in \Sigma^h, \tag{3a}$$

$$b(\underline{\underline{\sigma_\eta^h}}, v^h) = -\langle f, v^h \rangle_\Omega \quad \forall v^h \in U^h. \tag{3b}$$

離散近似問題 (3) は，任意の $\eta \geq 0$ に対して，一意解である．これを解いて近似解を得る方法が IP 法となる．

(3) 事前差異評価と事前誤差評価

HJ 法で用いられる有限要素空間を導入する：

$$\widetilde{\Sigma}^h := \left\{ \underline{\underline{\tau}}^h \in \Sigma^h \mid \text{各 } e\ (\in \mathcal{E}^h_\circ) \text{ において，} M_{nn}(\underline{\underline{\tau}}^h) \text{ は連続} \right\}.$$

双一次形式を導入する：

$$\tilde{a}(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{\tau}}) := \sum_{K\in\mathcal{T}^h} \int_K \sigma_{ij}\tau_{ij}, \quad \tilde{b}(\underline{\underline{\tau}}, v) := \sum_{K\in\mathcal{T}^h} \left[\int_K \tau_{ij,j} v_{,i} - \int_{\partial K} M_{nt}(\underline{\underline{\tau}}) \frac{\partial v}{\partial t} \right].$$

HJ 法は次のようになる：find $\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^h \in \widetilde{\Sigma}^h$ and $\tilde{u}^h \in U^h$ satisfying

$$\tilde{a}(\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^h, \underline{\underline{\tilde{\tau}}}^h) + \tilde{b}(\underline{\underline{\tilde{\tau}}}^h, \tilde{u}^h) = 0 \quad \forall \underline{\underline{\tilde{\tau}}}^h \in \widetilde{\Sigma}^h, \tag{4a}$$

$$\tilde{b}(\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^h, v^h) = -\langle f, v^h \rangle_\Omega \quad \forall v^h \in U^h. \tag{4b}$$

以後，三角形分割の族 $\{\mathcal{T}^h\}_{h\in(0,\bar{h}]}$ を考え，準一様であると仮定する．

定理 1 任意の $f \in H^{-1}(\Omega)$ に対して，問題 *(1)* の解を $u \in H^2_0(\Omega)$ とし，$u \in H^r(\Omega)$ $(r \geq 3)$ と仮定する．$\{\underline{\underline{\sigma_\eta^h}}, u^h_\eta\} \in \Sigma^h \times U^h$ と $\{\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^h, \tilde{u}^h\} \in \widetilde{\Sigma}^h \times U^h$ をそれぞれ *IP* 法 *(3)* と *HJ* 法 *(4)* の解とする．この時，任意の $\eta \geq 1$ に対して，

$$\left\| \underline{\underline{\sigma_\eta^h}} - \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^h \right\|_\Omega \leq C\eta^{-1} h^{s-2} \left(\left|\underline{\underline{\sigma}}\right|_{\delta,\Omega} + |u|_{s,\Omega} \right), \quad \left|u^h_\eta - \tilde{u}^h\right|_{1,\Omega} \leq C \begin{cases} \eta^{-1}\|f\|_{-1,\Omega} & \textit{if} \quad k = 1, \\ \eta^{-1} h^{s-1} \left(\left|\underline{\underline{\sigma}}\right|_{\delta,\Omega} + |u|_{s,\Omega} \right) & \textit{if} \quad k \geq 2 \end{cases}$$

が成り立つ．ここで，$s := \min\{k+1, r\}$, $\delta := \min\{r-2, k\}$ であり，C は h, η, f に依らない正定数である．

定理 2 問題 *(1)* の解を $u \in H_0^2(\Omega)$ とし，$u \in H^r(\Omega)$ $(r \geq 3)$ と仮定する．$\sigma_{i,j} := u_{,ij}$ $(1 \leq i,\, j \leq 2)$ とおく．離散近似問題 *(3)* の解を $\{\underline{\underline{\sigma}}_\eta^h,\, u_\eta^h\} \in \Sigma^h \times U^h$ とする．さらに $\eta \geq 1$ とする．この時,

$$\left\|\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_\eta^h\right\|_\Omega \leq C(h^\delta + \eta^{-1}h^{s-2})\|u\|_{\delta+2,\Omega}, \quad |u - u_\eta^h|_{1,\Omega} \leq C \begin{cases} (h+\eta^{-1})\|f\|_{-1,\Omega} & \mathit{if} \quad k = 1, \\ h^{s-1}\|u\|_{\delta+2,\Omega} & \mathit{if} \quad k \geq 2 \end{cases}$$

が成り立つ．ここで，C は h と η に依らない正定数である．

(4) IP 法で生ずる行列の条件数の評価

有限要素空間 Σ^h と U^h の基底をそれぞれ $\left\{\underline{\underline{\Phi}}^i\right\}_{1\leq i\leq N}$ と $\left\{\varphi^i\right\}_{1\leq i\leq M}$ とする．ここで，$N := \dim \Sigma^h$, $M := \dim U^h$ である．行列：

$$A_\eta := \left[a_\eta\left(\underline{\underline{\Phi}}^j,\, \underline{\underline{\Phi}}^i\right)\right]_{1\leq i,\, j\leq N}, \qquad B := \left[b\left(\underline{\underline{\Phi}}^j,\, \varphi^i\right)\right]_{1\leq i\leq M,\ 1\leq j\leq N}$$

を導入すると，問題 (3) は，次のように書ける：find $\{\boldsymbol{\sigma}_\eta,\, \boldsymbol{u}_\eta\} \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$ such that

$$A_\eta\boldsymbol{\sigma}_\eta + B^T\boldsymbol{u}_\eta = \mathbf{0} \quad \text{in } \mathbb{R}^N, \tag{5a}$$

$$B\boldsymbol{\sigma}_\eta = -\boldsymbol{f} \quad \text{in } \mathbb{R}^M. \tag{5b}$$

連立一次方程式 (5) で $\boldsymbol{\sigma}_\eta$ を消去することによって，$\boldsymbol{u}_\eta$ に関する連立一次方程式を得ることができる：

$$\mathcal{A}_\eta\boldsymbol{u}_\eta = \boldsymbol{f}. \tag{6}$$

ここで，$\mathcal{A}_\eta := BA_\eta^{-1}B^T$ である．

命題 1 ある正定数 c_ℓ, C_ℓ $(\ell = 1,\, 2)$ が存在して,

$$c_1 + c_2\eta \leq \mathrm{cond}(A_\eta) \leq C_1 + C_2\eta \quad \forall\eta \geq 0, \quad \forall h \in (0,\, \bar{h}]$$

が成り立つ．ただし，c_ℓ, C_ℓ $(\ell = 1,\, 2)$ は h と η に依らない.

命題 2 ある正定数 C が存在して,

$$\mathrm{cond}(\mathcal{A}_\eta) \leq Ch^{-4} \quad \forall\eta \geq 1, \quad \forall h \in (0,\, \bar{h}]$$

が成り立つ．ただし，C は h と η に依らない.

参考文献

[1] Arnold, D.-N.; Douglas, J.-Jr.; Gupta, C.-P., Numer. Math. **45** (1984), 1–22.

[2] Becker, Roland; Capatina, Daniela; Joie, Julie, Numer. Methods Partial Differential Equations **28** (2012), no. 3, 1013–1041.

[3] Brezzi, F.; Douglas, J.-Jr.; Marini, L.-D., Numer. Math. **47** (1985), 217–235.

[4] Falk, R. S. and Osborn, J. E., RAIRO Anal. Numér., **14**, (1980), 249–277.

[5] Hansbo, P.; Larson, M.-G., M2AN Math. Model. Numer. Anal. **37** (2003), 63–72.

[6] Huang, X. and Huang, J., J. Sci. Comput., **69**, (2016), 1251–1278.

[7] Johnson, C., Numer. Math. **21** (1973), 43–62.

[8] Oikawa, I., J. Sci. Comput. **67** (2016), 475–492.

[9] Raviart, P.-A.; Thomas, J. M., Mathematical aspects of finite element methods (Proc. Conf., Consiglio Naz. delle Ricerche (C.N.R.), Rome, 1975), pp. 292–315. Lecture Notes in Math., Vol. 606, Springer, Berlin, 1977.

5．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計0件

〔学会発表〕　計1件（うち招待講演　0件／うち国際学会　0件）

1．発表者名 小山大介
2．発表標題 重調和問題に対する内部ペナルティ法で生ずる行列の条件数の評価
3．学会等名 日本数学会2021 年度秋季総合分科会応用数学分科会
4．発表年 2021年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

6．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

7．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

8．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関