

令和 6 年 6 月 6 日現在

機関番号：17102

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2019～2023

課題番号：19K03638

研究課題名（和文）流れ問題に対する特性曲線一般化粒子法の数学的基盤の整備

研究課題名（英文）Mathematical fundamentals of generalized characteristic particle methods for flow problems

研究代表者

田上 大助（TAGAMI, Daisuke）

九州大学・マス・フォア・インダストリ研究所・准教授

研究者番号：40315122

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,300,000円

研究成果の概要（和文）：流れ問題に対する粒子法の数値計算でしばしば用いられる微圧縮Navier-Stokes方程式を導入し、特性曲線一般化粒子法の適用を試みた。特性曲線一般化粒子法を非圧縮Navier-Stokes方程式に対する創成解問題へ適用した数値実験、導入した特性曲線一般化粒子法のより物理的に自然な実問題への適用、などを通して、導入した特性曲線一般化粒子法の基本的な安定性や適切性、実問題への適用可能性を数値的に確認した。さらに、微圧縮Navier-Stokes方程式に対する特性曲線一般化粒子法の誤差評価に必要な予備的な結果を発展させ、導入した特性曲線一般化粒子法の誤差評価を行った。

研究成果の学術的意義や社会的意義

移動境界を持つ流れ問題に対する効率的な数値計算手法として、粒子法は広く用いられているが、その数値解析学の視点から見た誤差評価の整備は、差分法や有限要素法など他の数値計算手法と比較すると非常に遅れていた。本研究で得られた成果より、粒子法に対する数値解析学の視点から見た結果を用いることで、数値計算手法に対する数学的正当化が進んだことには大きな意義がある。また、粒子法を用いて様々な実際の問題の数値計算を行う際の得られる数値計算結果に対する信頼性が向上することとなり、ソフトウェア開発など様々な実社会への応用に貢献することができるため、その社会的意義も大きい。

研究成果の概要（英文）：We introduced a slightly incompressible Navier-Stokes equations, which are often used in the numerical calculation of particle methods for flow problems, and applied the characteristic generalized particle method into the equations. Through numerical experiments of manufactured solution problems of incompressible Navier-Stokes equations by using the characteristic generalized particle method and applications to more physically practical problems, we numerically confirmed the stability and appropriateness of the characteristic generalized particle method. Moreover, we developed preliminary results necessary for error estimates of the characteristic generalized particle method for the slightly incompressible Navier-Stokes equations, and developed error estimates of the characteristic generalized particle method.

研究分野：数値解析学

キーワード：特性曲線一般化粒子法 流れ問題 Navier-Stokes方程式 誤差評価 特性曲線法 粒子法 創成解問題

## 1. 研究開始当初の背景

粒子法は偏微分方程式に対する数値計算手法の一つであり、1970 年代に Gingold-Monaghan[A]で提案された Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) 法や、1990 年代に Koshizuka ら[B]で提案された Moving Particle Semi-implicit (MPS) 法が頻りに利用され、宇宙物理・土木工学・機械工学などに現れる様々な問題へ、その適用範は現在でも拡がり続けている。

粒子法では、考える領域内に粒子と呼ばれる点を複数配置し、それぞれの粒子に対応した有界な台を持つ参照関数の結合によって、考える問題の対象となる関数を近似する。近似に用いる粒子間の連結性は、粒子間の距離と参照関数の台を定める影響半径のみに依存するため、例えば差分法や有限要素法などの数値計算手法において必要となり、その作成に計算時間を要する格子やメッシュを予め準備しなくて良い、という特徴を持つ。この特徴は、時間に依存して領域形状が変化する 移動境界問題の数値計算において大きな利点となることから、津波遡上のような移動境界問題に対する数値計算が、粒子法を用いて行われている (例えば Rogers-Dalrymple[C])。

このように粒子法はその特徴を活かして適用範囲を拡大しているにも関わらず、研究代表者も研究成果(例えば Tabata-Tagami[D])を挙げている差分法や有限要素法など他の数値計算手法と比較すると、粒子法に対する数学的視点からの研究成果は我々の知る限り非常に少なかった。Mas-Gallic-Raviart [E]や Ben Moussa [F]で 1 階双曲型偏微分方程式に対する SPH 法の誤差評価が、石島-木村[G]で MPS 法で用いる近似勾配作用素の打ち切り誤差評価が、それぞれ行われている。しかしこれらの誤差評価では、計算コストがかかり過ぎて現実的ではない設定が使われていたり、そもそも対象とする問題が限定されていたりして、その成果を現実問題の数値計算へ適用するには困難が多かった。

また、メッシュが不要であるという粒子法の特徴は、一方で離散化パラメーターの自由度を増大させるという欠点を生む。粒子法を用いた数値計算を行う場合、領域内に配置する粒子の数と粗密、選択する参照関数の滑らかさや影響半径の大きさ、参照関数の結合に用いる粒子体積の大きさなど、多くの離散化パラメーターの選択を適切に行う必要がある。しかし従来の粒子法を用いた数値計算では、離散化パラメーターの選択が経験則や計算コストの観点からのみ考えられており、例えば用いる粒子数の増加が得られる数値計算精度の向上に繋がっているか、明確に答えることが不可能な状況であった。

## 2. 研究の目的

本研究課題は、研究代表者がこれまでに得ている粒子法の打ち切り誤差評価に必要な離散化パラメーターに関する十分条件、固定領域上における特性曲線一般化粒子法を用いた移流拡散方程式に対する誤差評価などの成果を活用し、未だ確立していない固定領域上における非圧縮粘性流れに対する一般化粒子法の誤差評価を通して、その数学的基盤の整備を行うことが第一の目的である。さらに数学的基盤の整備を行った手法に基づくプログラムの開発・計算機への実装・検証問題を用いた精度検証が第二の目的である。

これら 2 つの目的が達成されれば、従来は経験則に頼っていた離散化パラメーターの選択を、誤差評価の十分条件として与えられる粒子配置・影響半径・粒子体積が満たすべき不等式の確認によって系統的に行える。さらに流れ問題に対する粒子法において時間の経過に伴い生じる粒子の偏在を、従来は様々な計算パラメーターの調整を伴う局所的な粒子位置の補正によって解消する必要があったが、特性曲線一般化粒子法の導入により、誤差評価の十分条件を満足するように時刻ステップ毎に粒子の再配置を行うだけで系統的に粒子の偏在が解消できると期待される。

以上のように、従来は経験則に頼っていた粒子法の計算精度維持に必要な手続きを、整備された数学的基盤に基づき系統的に行える技術を開発する事が本研究課題の目的であり、同時に、本研究課題の独自性と創造性を表す特徴となっている。

## 3. 研究の方法

本研究課題では、以下の 3 段階に分けて研究を推進した:

- a) 非圧縮 Navier-Stokes 方程式に対する特性曲線一般化粒子法の導入と誤差評価  
粒子法を適用して非圧縮 Navier-Stokes 方程式の数値計算を行う場合、時間方向の離

散化には分数段近似を用いる(例えば Guermond ら[H]参照). Guermond らは空間方向の離散化に有限要素法を用いているため, 研究代表者は時間方向に分数段近似を, 空間方向の離散化に一般化粒子法を用いた場合に拡張することで, 固定領域上における非圧縮 Navier-Stokes 方程式に対する特性曲線一般化粒子法の誤差評価を行う.

最初に, 時間方向に分数段近似を用いた粒子法の数値計算で行われている圧力 Poisson 方程式に摂動項を付加した微圧縮 Navier-Stokes 方程式を導入し, その誤差評価を行う. 微圧縮性の導入により, 得られる成果が実際に広く用いられている粒子法に対応する数学的基盤を形成することが期待できる. 微圧縮 Navier-Stokes 方程式の極限が非圧縮 Navier-Stokes 方程式となることは Kreiss ら[I]で示されている. したがって微圧縮の場合に得られた成果を非圧縮 Navier-Stokes 方程式に対する粒子法の誤差評価へと修正する際には, Kreiss らの結果を活用できる. また移流拡散方程式に対する粒子法にも導入した, 半陰的特性曲線一般化粒子法を導入する. これにより, 時間の経過と共に粒子の偏在を防ぎ, 各時刻ステップにおける粒子配置が既に研究代表者が示している一般化粒子法の打ち切り誤差評価の十分条件を満たすように設定できる. 上記の各段階において必要となるエネルギー評価や非線形項の取り扱いには, 研究代表者がこれまでで得ている流れ問題に対する有限要素法の成果を有効に活用する.

- b) 数学的基盤が整備された特性曲線一般化粒子法の計算機実装と誤差評価の再現実験  
数学的基盤が整備された特性曲線一般化粒子法を計算機に実装する. そして創成解問題を用いて数値実験を行い, 数学的基盤整備で得られた誤差の収束次数と比較する. これにより, 得られた数学的基盤の有効性を数値実験で確認する.
- c) 非圧縮 Navier-Stokes 方程式に対する特性曲線一般化粒子法の実問題への応用  
本研究課題で提案する特性曲線一般化粒子法の実問題への適用可能性の検証と次段階への準備とを兼ねて, 粒子法に対する検証問題としてよく知られているダム砕波問題へ提案した特性曲線一般化粒子法を適用し, その有効性を検証する.

#### 4. 研究成果

本研究課題では最初に, 時間方向に分数段近似を用いた粒子法の数値計算で行われている圧力 Poisson 方程式に摂動項を付加した微圧縮 Navier-Stokes 方程式を導入し, 対応する方程式に対する特性曲線一般化粒子法を導入した. 導入した特性曲線一般化粒子法の誤差評価を進める前に, 研究代表者が従来行ってきた非圧縮 Navier-Stokes 方程式に対する計算手法の誤差評価で得られている知見を直接には応用できない点が数箇所存在したため, その準備となる数学解析を行い, いくつかの成果を得た. また, 導入した特性曲線一般化粒子法を用いた数値実験の一つである創成解問題への適用を試みた. この数値実験により, 導入した特性曲線一般化粒子法の基本的な安定性や適切性を確認できた.

その後, 期待される誤差評価に関連した数値実験を行うとともに, より物理的に自然で実問題に近いと考えられるいくつかの検証問題に対して, 提案した微圧縮 Navier-Stokes 方程式に対する特性曲線一般化粒子法を適用し, その安定性や適切性に関する数値実験を行った. さらに, 研究計画で本研究課題の目的の 1 つとした非圧縮 Navier-Stokes 方程式に対する特性曲線一般化粒子法の導入と誤差評価について, 研究代表者が従来得ている知見では不足する点について引き続き補助的な数値解析に関連する成果を得た.

さらに, 本研究課題の目的の 1 つである導入した特性曲線一般化粒子法のより物理的に自然な実問題への適用を目指したプログラム作成や試験的な数値実験などを行った. また導入した特性曲線一般化粒子法の誤差評価で用いるために, 研究代表者が従来行ってきた非圧縮 Navier-Stokes 方程式に対する有限要素法や移流拡散方程式に対する特性曲線一般化粒子法の誤差評価で得た知見を改良し, 微圧縮 Navier-Stokes 方程式に対する特性曲線一般化粒子法の誤差評価に必要な予備的な結果を得た.

最後に, 微圧縮 Navier-Stokes 方程式に対する特性曲線一般化粒子法の誤差評価に必要な予備的な結果を発展させて, 本研究課題の最終的な目的である, 導入した特性曲線一般化粒子法の誤差評価に対応した準備を元に, 微圧縮 Navier-Stokes 方程式に対する特性曲線一般化粒子法の誤差評価を得た.

さらにこれらの成果を, 粒子法の主たる研究者組織の 1 つとして国際的にも認知されている SPHERIC が主催する国際会議へ研究期間中に複数回に渡り投稿し, 査読を受けた後に講演を受理された. これにより, 得られた成果を粒子法の数値計算に関係する研究者の間に国際的にも周知することができた.

#### 参考文献

- [A] Gingold, R.A. and Monaghan, J. J.: *Mon. Not. R. Astr. Soc.*, **181** (1977), 375-389.
- [B] Koshizuka, S., Tamako, H., and Oka, Y.: *Comput. Fluid Dyn. J.*, **4** (1995), 29-46.
- [C] Rogers, B.D. and Dalrymple, R.A.: *Adv. Coast. Ocean Engrg.*, **10** (2008), 75-100.
- [D] Tabata, M. and Tagami, D.: *Numer. Math.*, **100** (2005), 351-372.
- [E] Mas-Gallic, S. and Raviart, P.A.: *Numer. Math.*, **51** (1987), 323-352.
- [F] Ben Moussa, B.: *Methods Appl. Anal.*, **13** (2006), 29-62.
- [G] 石島清宏, 木村正人: *日本応用数理学会論文誌*, **20** (2010), 165-182.
- [H] Guermond, J.-L., Mineev, P.D., and Shen, J.: *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **195** (2006), 6011-6045.
- [I] Kreiss, H.-O., Lorenz, J., and Naughton, M.J., *Adv. Appl. Math.*, **12** (1991), 187-214.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 TAGAMI, Daisuke	4. 巻 978-1-3999-5885-1
2. 論文標題 Numerical Analysis of the Viscoelastic Flow Problems by a Semi-Implicit Characteristic Generalized Particle Methods	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Proceedings of the 17th SPHERIC International Workshop (SPHERIC 2023)	6. 最初と最後の頁 369--375
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 TAGAMI, Daisuke	4. 巻 NA
2. 論文標題 Numerical Stability of a Semi-Implicit Characteristic Time Integration of the Generalized Particle Method for Flow Problems	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Proceedings of the 15th SPHERIC International Workshop (SPHERIC 2021)	6. 最初と最後の頁 24--29
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計12件（うち招待講演 0件 / うち国際学会 8件）

1. 発表者名 TAGAMI, Daisuke
2. 発表標題 Numerical Analysis of the Viscoelastic Flow Problems by a Semi-Implicit Characteristic Generalized Particle Methods
3. 学会等名 The 17th SPHERIC International Workshop (SPHERIC 2023) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 田上 大助
2. 発表標題 疎空間を離散 de Rham 系列を満たす多角形要素で近似した不完全 BDD 法
3. 学会等名 第6回大規模電 磁界数値解析手法に関する研究シンポジウム
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 田上 大助
2. 発表標題 離散 de Rham 系列を満たす多面体要素を用いた不完全 BDD 法の静磁場問題への適用
3. 学会等名 第 27 回計算工学講演会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 TAGAMI, Daisuke
2. 発表標題 Numerical analysis of an incomplete balancing domain decomposition method based on polynomial finite element spaces
3. 学会等名 COMPUMAG2021 (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 田上 大助
2. 発表標題 離散 de Rham 系列を満たす多角形要素を用いた電磁場問題の数値計算の基礎
3. 学会等名 第5回大規模電磁界数値解析手法に関する研究シンポジウム (LSCEM2022)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 TAGAMI, Daisuke
2. 発表標題 Numerical Analysis of an Incomplete Balancing Domain Decomposition Method based on Polynomial Finite Element Spaces
3. 学会等名 The 23rd Conference on the Computation of Electromagnetic Fields (COMPUMAG 2021) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 田上 大助
2. 発表標題 疎空間にある多角形要素を用いた反復型領域分割法の前処理
3. 学会等名 第26回計算工学講演会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 TAGAMI, Daisuke
2. 発表標題 Numerical Stability of a Characteristic Generalized Particle Method for Flow Problems
3. 学会等名 SPHERIC 2020 (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 TAGAMI, Daisuke
2. 発表標題 Numerical Stability of a Semi-Implicit Characteristic Time Integration of the Generalized Particle Method for Flow Problems
3. 学会等名 SPHERIC 2021 (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 TAGAMI Daisuke
2. 発表標題 An incomplete balancing domain decomposition method for magnetostatic problems
3. 学会等名 APCOM 2019 (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 TAGAMI Daisuke
2. 発表標題 An incomplete balancing domain decomposition method for magnetostatic problems
3. 学会等名 ICCM 2019 (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 TAGAMI Daisuke
2. 発表標題 Numerical analysis of the Navier--Stokes equations by a semi-implicit characteristic generalized particle methods
3. 学会等名 SPHERIC 2019 (国際学会)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関